

doi: 10.11823/j.issn.1674-5795.2023.04.12

原子干涉仪灵敏度的阿伦方差分析

邓敏¹, 李佳佳^{2,3}, 王柯穆^{2,3}, 罗晖^{2,3}, 汪之国^{2,3*}

(1. 湖南高地光电科技发展有限公司, 湖南长沙 410073;

2. 国防科技大学 前沿交叉学科学院, 湖南长沙 410073;

3. 量子信息机理与技术湖南省重点实验室, 湖南长沙 410073)

摘要: 针对分析原子干涉仪灵敏度时, 采用哪种阿伦方差容易出现混淆的问题, 系统地给出了阿伦方差、重叠阿伦方差和修正阿伦方差三种形式在时域和频域中的详细推导, 分析了它们对五类典型噪声的分辨能力, 指出修正阿伦方差具有更加适合评估原子干涉仪长期稳定性的特点。基于修正阿伦方差在频域中的表达式, 文中还首次给出了存在测量死区的原子干涉仪灵敏度与噪声功率谱之间的传递函数, 通过分析其特点, 指出了提高原子干涉仪灵敏度的两条具体途径, 为原子干涉仪技术的进一步发展和评价奠定了更加扎实的理论基础。

关键词: 原子干涉仪; 阿伦方差; 传递函数; 灵敏度

中图分类号: TB939

文献标志码: A

文章编号: 1674-5795(2023)04-0135-11

Allan variance analysis of atomic interferometer sensitivity

DENG Min¹, LI Jiajia^{2,3}, WANG Kemu^{2,3}, LUO Hui^{2,3}, WANG Zhiguo^{2,3*}

(1. Hunan Gaodi Photoelectric Technology Development Co. Ltd. Changsha 410073, China;

2. College of Advanced Interdisciplinary Studies, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;

3. Hunan Key Laboratory of Mechanism and Technology of Quantum Information, NUDT, Changsha 410073, China)

Abstract: In view of the confusion of using different Allan variance to analyze the sensitivity of atomic interferometer, this paper systematically gives the detailed derivation of Allan variance, overlapping Allen variance and modified Allan variance in time domain and frequency domain, analyzes their resolution to five kinds of typical noise, and points out that the modified Allan variance is more suitable for evaluating the long-term stability of atomic interferometer. Based on the expression of modified Allan variance in frequency domain, the transfer function between sensitivity and noise power spectrum of atomic interferometer with measurement dead zone is given for the first time. By analyzing its characteristics, two specific ways to improve the sensitivity of atomic interferometer are pointed out. These studies have laid a more solid theoretical foundation for the further development and evaluation of atomic interferometer technology.

Key words: atomic interferometer; Allan variance; transfer function; sensitivity

0 引言

自 1991 年斯坦福大学朱棣文小组实现脉冲式原子干涉仪以来, 基于原子干涉的精密测量物理

飞速发展, 原子干涉仪在重力加速度测量^[1]、角速度测量^[2]、牛顿引力常数测量^[3]、精细结构常数测量^[4]和等效原理验证^[5]等方面得到了广泛应用。

收稿日期: 2022-12-29; 修回日期: 2023-04-14

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61671458)

引用格式: 邓敏, 李佳佳, 王柯穆, 等. 原子干涉仪灵敏度的阿伦方差分析[J]. 计测技术, 2023, 43(4): 135-145.

Citation: DENG M, LI J J, WANG K M, et al. Allan variance analysis of atomic interferometer sensitivity[J]. Metrology & Measurement Technology, 2023, 43(4): 135-145.



目前,原子干涉仪的灵敏度主要采用阿伦方差(Allan Variance, AVAR)进行分析。阿伦方差是一种在时域内分析数据序列的方法,最开始由美国国家标准与技术研究院(National Institute of Standards and Technology, NIST)的Allan和Barnes等人在分析原子钟振荡器的频率稳定性时,为了解决标准方差随数据量增加不再收敛的问题而发明的一种新的数据处理方法,基本逻辑就是让数据序列做一阶差分后再重新计算标准方差^[6]。现在阿伦方差也是识别和量化原子干涉仪数据中存在不同噪声项的主流方法^[7-14]。借鉴原子钟的噪声模型^[15-23],主要考虑五类典型噪声:调频随机游走噪声(Random Walk FM, RWFM)、调频闪烁噪声(Flicker FM, FFM)、调频白噪声(White FM, WFM)、调相闪烁噪声(Flicker PM, FPM)和调相白色噪声(White PM, WPM)^[24]。它们的噪声功率谱密度可写成频率的幂函数 $S(f) \sim f^\alpha$ ($\alpha = -2, -1, 0, 1, 2$)。阿伦方差有阿伦方差、重叠阿伦方差(Overlapping Allan Variance, OAVAR)和修正阿伦方差(Modified Allan Variance, MAVAR)三种常用的形式。前两种阿伦方差的缺点是不能区分FPM和WPM两类高频噪声^[6]。直到阿伦方差发明16年后,修正阿伦方差的出现才彻底解决了该问题^[25]。

上述三类方差在时域和频域中的推导零散分布于Allan和Barnes等人在20世纪70年代早期的一系列文献中^[25-29],却未进行系统推导。2016年,Allan撰写的综述文章里则是直接引用结论^[6],并未明确地指出阿伦方差和修正阿伦方差之间的差别,读者很难从该文中理解二者的特性和适用性。2020年,Riley针对阿伦方差和修正阿伦方差之间的差别做出了补充说明^[30],但也未给出系统推导,且公式的角标定义不够明确,直接引用文中公式会造成误解。除此之外,这些文章中的阿伦方差在频域中的表达式均假设输出数据是一个无死区的连续测量物理量。2008年,Landragin提出存在测量死区的阿伦方差在原子干涉仪领域中的频域表达式^[7]。目前,针对修正阿伦方差的表达式还未见报道。虽然已经有软件能很方便地计算这三类阿伦方差^[31],但对其在时域和频域中进行系统而详细推导的文献却很少见。为了弥补这方面的缺失,本文分析了三类阿伦方差对五类典型有色

噪声的分辨能力,并指出修正阿伦方差具有更适合用来评估原子干涉仪长期稳定性的特点。除此之外,还推导出了存在测量死区的修正阿伦方差在原子干涉仪中的频域表达式,给出了原子干涉仪灵敏度与相位噪声和环境振动噪声功率谱的关系,讨论了其传递函数的特点,并指出了提高原子干涉仪灵敏度的两条具体途径。

1 阿伦方差的三种形式

1.1 阿伦方差的时域表示

阿伦方差最开始用于原子钟里描述频率的稳定性,解决了普通标准方差对某些类型噪声会随数据增长而不再收敛的问题。根据原子钟输出数据为频率偏差序列还是相位偏差序列的情形,阿伦方差会有两种不同的表达式。若原子钟输出的数据是频率偏差序列 y_i , $y_i = \delta f_i$ ($i=1, 2, 3 \dots N$), 数据输出率为 $1/\tau_0$ (τ_0 为最小采样周期), 则AVAR在平均时间 τ 为整数 m 倍最小采样周期($\tau = m\tau_0$)时的定义为

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2(M-1)} \sum_{k=1}^{M-1} (\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2, (M = \lfloor \frac{N}{m} \rfloor) \quad (1)$$

式中: $\sigma_y^2(\tau)$ 为 y_i 的AVAR, M 为数据的分组数, $1/2$ 是为了让AVAR与标准方差计算值在 $m=1$ 时相等, 符号 $\lfloor \cdot \rfloor$ 为向下取整, \bar{y}_k 为 y_i 在区间 $[m(k-1)\tau_0, mk\tau_0]$ 内的平均值, 即

$$\begin{aligned} \bar{y}_{k+1} &= \frac{y_{mk+1} + y_{mk+1+1} + \dots + y_{m(k+1)}}{m} \\ \bar{y}_k &= \frac{y_{m(k-1)+1} + y_{m(k-1)+2} + \dots + y_{mk}}{m} \end{aligned} \quad (2)$$

AVAR在 $m=3$ 时的数据分组示范如图1所示。

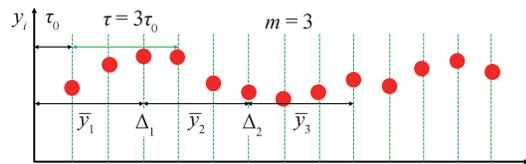


图1 AVAR的数据分组示范

Fig.1 Data packet demonstration of AVAR

若原子钟输出的测量数据是相位偏差序列 $x_i = \delta\phi_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, N$)。相位 x 和频率 y 的关系为

$$y = \frac{dx}{dt}, \bar{y}_{k'} = \frac{x_{mk'} - x_{m(k'-1)}}{\tau}, \tau = m\tau_0 \quad (3)$$

AVAR可以写为

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2(M-2)} \sum_{k'=0}^{M-2} \left(\frac{x_{m(k'+2)} - 2x_{m(k'+1)} + x_{mk'}}{\tau} \right)^2, (M = \lfloor \frac{N}{m} \rfloor) \quad (4)$$

令 x_k 代替 $x_{mk'}$, 则式(4)变为

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2(M-2)\tau^2} \sum_{k=0}^{M-2} (x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k)^2 \quad (5)$$

式(5) $x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k$ 对相位序列 x_i 为二阶差分, 而式(1)中 $\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k$ 是对频率偏差序列均值 \bar{y}_i 的一阶差分, 它们给出的 AVAR 值 $\sigma_y(\tau)$ 都是描述系统的频率稳定性, 而不是相位稳定性。在原子干涉陀螺仪中使用阿伦方差评估系统性能时, 若输出数据是角速度偏差序列 $\delta\Omega_i$, 则对应 $y_i = \delta f_i$; 若输出数据是角度偏差序列 $\delta\theta_i$, 则对应 $x_i = \delta\phi_i$ 。这种区别在很多文献中被混淆了。

式(1)中一阶差分项 $\Delta_k (\Delta_k = \bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)$ 在 $\tau = m\tau_0$ 时, 只有 $M-1$ 项。如图2所示, 若对数据重新分组, 数据会得到更充分利用, 使 Δ_k 数量增加到 $N-2m+1$, 阿伦方差随 τ 的变化将更加平滑。

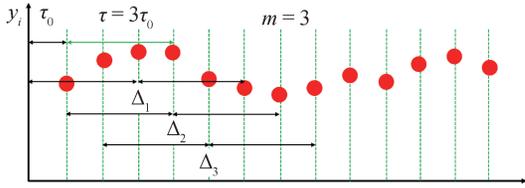


图2 OAVAR的数据分组示范

Fig.2 Data packet demonstration of OAVAR

因此, 可得重叠阿伦方差的表达式为

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2(N-2m+1)} \sum_{i=0}^{N-2m} (\bar{y}_{i+m} - \bar{y}_i)^2, (\tau = m\tau_0)$$

$$\bar{y}_{i+m} = \frac{y_{i+m+1} + y_{i+m+2} + \dots + y_{i+2m}}{m} \quad (6)$$

$$\bar{y}_i = \frac{y_{i+1} + y_{i+2} + \dots + y_{i+m}}{m}$$

若在 OAVAR 的数据分组基础上, 对一阶差分项 Δ_i 增加一次滑动平均, 公式为

$$\bar{\Delta}_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \Delta_{ij} \quad (7)$$

其中, $\bar{\Delta}_i$ 共有 $N-3m+2$ 项, 数据分组情况如图3所示。修正阿伦方差的表达式为

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2(N-3m+2)m^2} \sum_{j=0}^{N-3m+1} \left\{ \sum_{i=0}^{m-1} (\bar{y}_{j+i+m} - \bar{y}_{j+i}) \right\}^2$$

$$\bar{y}_{j+i+m} = \frac{y_{j+i+m+1} + y_{j+i+m+2} + \dots + y_{j+i+2m}}{m} \quad (8)$$

$$\bar{y}_{j+i} = \frac{y_{j+i+1} + y_{j+i+2} + \dots + y_{j+i+m}}{m}$$

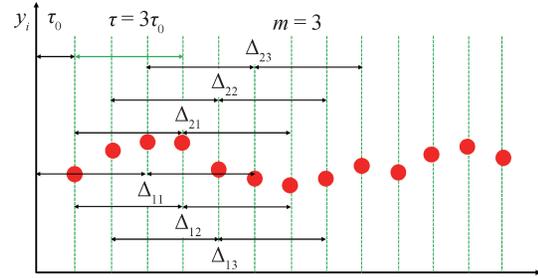


图3 MAVAR的数据分组示范

Fig.3 Data packet demonstration of MAVAR

1.2 阿伦方差的频域表示

假设 $\{y_i\}$ 为一组无测量死区的连续测量物理量, 则式(1)中的平均值可写为积分形式, 即

$$\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k = \frac{1}{\tau} \int_{t_k+\tau}^{t_k+2\tau} y(t) dt - \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_k+\tau} y(t) dt \quad (9)$$

式中: t_k 为第 k 段时间内求物理量 y 平均值 \bar{y}_k 的起始时刻。 $t_k = k\tau - \tau/2$, 其中, τ 为积分时长, $\tau = m\tau_0$ 。让积分上下限延拓至正负无穷大^[32], 引入一个矩形脉冲响应函数为

$$m(t, \tau) = \begin{cases} 1 & -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (10)$$

式(9)变为

$$\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} m\left(t - t_k - \frac{3\tau}{2}, \tau\right) y(t) dt - \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} m\left(t - t_k - \frac{\tau}{2}, \tau\right) y(t) dt \quad (11)$$

为了使 $m(t, \tau)$ 处于定义区间, 式(11)对自变量进行了零点延迟, 再引入 $\bar{m}(t, \tau)$, 其表达式为

$$\bar{m}(t, \tau) = m\left(t - t_k - \frac{3\tau}{2}, \tau\right) - m\left(t - t_k - \frac{\tau}{2}, \tau\right) \quad (12)$$

AVAR 在数据样本 $N \rightarrow \infty$ 时可以写为

$$\sigma_y^2(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2(M-1)} \sum_{k=1}^{M-1} (\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2 = \frac{1}{2} \langle (\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2 \rangle \quad (13)$$

$$= \frac{1}{2\tau^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{m}(t_1) dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{m}(t_2) dt_2 \langle y(t_1) y(t_2) \rangle$$

式中: $\langle y(t_1) y(t_2) \rangle$ 为随机变量 y_i 的自相关函数 $R(t_1, t_2)$, 假设该随机过程是各态遍历的广义平稳过程, 即均值和方差不随时间变化。随机变量 y_i 的噪声功率谱密度 $S_y(f)$ 与自相关函数关系为

$$R(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_y(f) e^{-j2\pi f(t_2 - t_1)} df \quad (14)$$

式中: j 为虚数。

将式(14)代入式(13)得到 $\sigma_y^2(\tau)$ 与噪声功率谱 $S_y(f)$ 的关系为

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2\tau^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{m}(t_1, \tau) e^{j2\pi t_1} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{m}(t_2, \tau) e^{-j2\pi t_2} dt_2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} S_y(f) df = \frac{1}{2\tau^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{G}(f)|^2 S_y(f) df \quad (15)$$

$\tilde{G}(f)$ 为函数 $\bar{m}(t)$ 的傅里叶变换, 即

$$\begin{aligned} \tilde{G}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{m}(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= e^{-j2\pi(t_k + 3\tau/2)} G(f) (1 - e^{j(2\pi f\tau)}) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\sigma_y^2(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2(N - 3m + 2)m^2} \sum_{j=0}^{N-3m+1} \left\{ \sum_{i=0}^{m-1} (\bar{y}_{j+i+m} - \bar{y}_{j+i}) \right\}^2 = \frac{1}{2m^2} \left\langle \left\{ \sum_{i=0}^{m-1} (\bar{y}_{i+m} - \bar{y}_i) \right\}^2 \right\rangle \quad (19)$$

为了和式(9)的下角标统一, 式(19)中的差分项 $\frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} (\bar{y}_{i+m} - \bar{y}_i)$ 可以改为

$$\begin{aligned} &\frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} (\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k) = \\ &\frac{1}{m\tau} \sum_{i=0}^{m-1} \left[\int_{t_k + \tau + i\tau_0}^{t_k + 2\tau + i\tau_0} y(t) dt - \int_{t_k + i\tau_0}^{t_k + \tau + i\tau_0} y(t) dt \right] \end{aligned} \quad (20)$$

式中: $t_k = k\tau - \tau/2$ 。

与式(12)的处理方法相同, 引入新的 $\bar{m}(t)$ 函数

$$\begin{aligned} \bar{m}(t) &= \frac{1}{m\tau} \sum_{i=0}^{m-1} \left[m \left(t - t_k - \frac{3\tau}{2} - i\tau_0, \tau \right) - \right. \\ &\quad \left. m \left(t - t_k - \tau/2 - i\tau_0, \tau \right) \right] \end{aligned} \quad (21)$$

$\sigma_y^2(\tau)$ 与随机变量 y_i 的噪声功率谱 $S_y(f)$ 的关系为

$$\begin{aligned} \sigma_y^2(\tau) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{m}(t_1, \tau) dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{m}(t_2, \tau) dt_2 R(t_1, t_2) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{G}(f)|^2 S_y(f) df \end{aligned} \quad (22)$$

此时, 新的 $\tilde{G}(f)$ 为式(21)的傅里叶变换, 令 $t' = t - (k+1)\tau - i\tau_0$, 则

$$\begin{aligned} \tilde{G}(f) &= \frac{1}{m\tau} \sum_{i=0}^{m-1} e^{-j(k+1)\tau - j(i\tau_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} [m(t', \tau) - \\ &\quad m(t' + \tau, \tau)] \cdot e^{-j2\pi ft'} dt' \\ &= \frac{1}{m\tau} e^{-j(k+1)\tau} G(f) (1 - e^{j2\pi f\tau}) \sum_{i=0}^{m-1} e^{-j(i\tau_0)} \end{aligned} \quad (23)$$

代入矩形脉冲响应函数的傅里叶变换 $G(f)$ 和

式中: $G(f)$ 为矩形脉冲响应函数 $m(t, \tau)$ 的傅里叶变换, 即

$$G(f) = \frac{\sin(\pi\tau f)}{\pi f} \quad (17)$$

$\sigma_y^2(\tau)$ 可以简化为

$$\sigma_y^2(\tau) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(\pi\tau f)}{(\pi\tau f)^2} S_y(f) df, (\tau = m\tau_0) \quad (18)$$

考虑到现实世界不存在负频率, 因此式(18)中的正负无穷积分直接改为单边正频率积分。式(18)为 AVAR 在频率中的表达式, OAVAR 和 AVAR 在数据量 N 趋于无穷大时有相同表达式, 但 MAVAR 的不同, 下面给出推导。

MAVAR 在数据样本 $N \rightarrow \infty$ 时可以写为

求和结果, 则

$$\tilde{G}(f) = \frac{[4 \sin^2(\pi\tau f)] e^{-j(k+1)\tau}}{m\tau (1 - e^{-j\tau_0})} \quad (24)$$

MAVAR 在频域中的表达式为

$$\sigma_y^2(\tau) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin^6(\pi\tau f)}{(m\pi\tau f)^2 \sin^2(\pi\tau_0 f)} S_y(f) df, (\tau = m\tau_0) \quad (25)$$

注意, 式(25)直接舍去了负频率。

1.3 原子干涉仪的灵敏度函数

原子干涉仪在不同的应用场景中, 可能采用不同的原子或者几何构型发生干涉过程, 但基本原理和光学 Mach-Zehnder 干涉仪类似。如图4所示, 以速度 v 进入干涉区域的原子与拉曼光脉冲发生三次相互作用, 分别相当于光学分束器 ($\pi/2$ 脉冲)、反射器 (π 脉冲) 和合束器 ($\pi/2$ 脉冲) 的作用。从制备原子源到完成干涉后的探测, 形成一次完整的测量周期 T_c , 干涉时间 T 一般指两次脉冲拉曼光之间的时间间隔。原子干涉仪最后的荧光探测信号 S 和参与干涉的原子数 N 的关系为^[33]

$$S \propto NP, P = \frac{1}{2} [1 - \cos(\Phi)] \quad (26)$$

式中: N 为参与干涉的总原子数目; P 为参与干涉的两个量子态在探测阶段时的转移概率; Φ 为干涉相移, 是载体转动 ($\Delta\Phi_\Omega$)、所在位置加速度 ($\Delta\Phi_a$) 或其它敏感物理量引入的相位, 单位是 rad。

若不考虑干涉仪测量具体物理量的标定因数,

原子干涉仪的灵敏度主要由干涉相位 Φ 的测量噪声水平决定, 而其它影响原子干涉仪的常见噪声也都可以等效到相位噪声中。本文主要讨论拉曼光相位噪声和拉曼光反射镜振动引入的相位噪声对干涉仪灵敏度的影响。另外, 原子干涉仪进行惯性量(加速度和角速度)测量时, 原子源的制备和信号探测都需要时间, 惯性信息在这些时间里会丢失, 存在测量死区^[2]。因此, 用阿伦方差来分析原子干涉仪灵敏度时, 不能假设输出数据 y_i 为一个无死区时间的连续测量物理量, 即式(9)和式(20)不能直接对变量 $y(t)$ 积分求平均值。

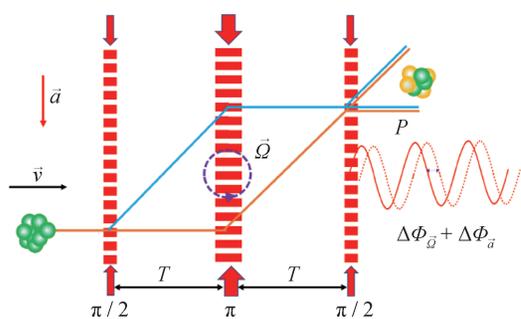


图4 三脉冲拉曼光 Mach-Zehnder 构型的原子干涉仪示意图
Fig.4 Schematic diagram of Mach-Zehnder atomic interferometer with three pulse Raman light

先引出荧光探测信号 S 中量子态转移概率 P 对系统随机扰动变量的敏感函数。假设原子与拉曼光脉冲序列作用过程中的某个 t_0 时刻, 拉曼光相位 ϕ 上发生了相位跳变 $\delta\phi(t_0)$, 导致最终转移概率 P 发生变化 $\delta P(\delta\phi, t_0)$ 。 δP 往往是相位扰动随机变量 $\delta\phi$ 的泛函, 可定义灵敏度函数^[34] $g(t)$ 为

$$g(t) = 2 \lim_{\delta\phi \rightarrow 0} \frac{\delta P(\delta\phi, t_0)}{\delta\phi} = \lim_{\delta\phi \rightarrow 0} \frac{(\delta\Phi)(\delta\phi, t_0)}{\delta\phi} \quad (27)$$

公式(27)利用了 $\delta P = \delta([1 - \cos(\Phi)]/2) = \sin(\Phi)\delta\Phi/2$, 并取 $\Phi = \pi/2$ (此时相位扰动对干涉仪影响最大)。原子干涉仪在一个干涉周期内的相移 Φ 变化是各个时刻拉曼光相位 $\phi(t)$ 扰动影响的

$$\delta\bar{\Phi}_k = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \delta\Phi_i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \int_{t_k + (i-1)T_c}^{t_k + iT_c} g\left(t - t_k - (i-1)T_c - \frac{T_c}{2}\right) \frac{d\phi}{dt} dt \quad (32)$$

式中: $t_k = kmT_c - T_c/2$ 。考虑 $g(t)$ 的定义区间为 $[-T_c/2, T_c/2]$, 对其进行了零点延迟: $t - t_k - (i-1)T_c - T_c/2$ 。由于存在测量死区 $T_c > 2T$, $g(t)$

$$\bar{g}(t) = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} [g(t - (k+1)mT_c - iT_c) - g(t - kmT_c - iT_c)] \quad (33)$$

总和, 即

$$\delta\Phi = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N g(t_i) \delta\phi(t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \frac{\delta\phi(t)}{\delta t} \delta t \quad (28)$$

式中: $g(t)$ 为敏感函数, 相当于干涉过程中不同时刻扰动量 $\phi(t)$ 引起干涉相移 Φ 变化的权重。

对于图4所示经典三脉冲拉曼光原子干涉仪, 把时间起点定在第二束拉曼光的中间时刻, 则 $g(t)$ 为一个奇函数, 定义域为 $[-T_c/2, T_c/2]$, T_c 为一个完整测量周期所需时间。 $g(t)$ 在 $t > 0$ 区间的表达式为^[7]

$$g(t) = \begin{cases} \sin(\Omega_R t) & 0 \leq t < \tau_R \\ 1 & \tau_R \leq t < T + \tau_R \\ -\sin(\Omega_R(T-t)) & T + \tau_R \leq t < T + 2\tau_R \end{cases} \quad (29)$$

式中: τ_R 为拉曼光 $\pi/2$ 脉冲时间长度, Ω_R 为原子与拉曼光相互作用的拉比振荡频率。在一个干涉周期内, 原子与拉曼光的相互作用时间很短, 此时灵敏度函数依赖于原子态的演化, 干涉相位随时间变化为 $\Omega_R t$ 。当拉曼光不与原子相互作用时, 灵敏度函数 $g(t) = 1$ 。

灵敏度函数 $g(t)$ 的频域表达式为^[7]

$$G(\omega) = \frac{4i\Omega_R}{\omega^2 - \Omega_R^2} \sin\left(\frac{\omega(T + 2\tau_R)}{2}\right) \times \left(\cos\left(\frac{\omega(T + 2\tau_R)}{2}\right) + \frac{\Omega_R}{\omega} \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) \right) \quad (30)$$

式中: $\tau_R/T \ll 1$, $G(\omega)$ 为 $g(t)$ 的傅里叶变换; 若 $\omega \ll \Omega_R$, 则 $G(\omega) \approx -4i \sin^2(\omega T/2)/\omega$ 。

1.4 原子干涉仪灵敏度与阿伦方差的关系

原子干涉仪的灵敏度由于干涉相位扰动 $\delta\Phi$ 的阿伦方差 $\sigma_\phi^2(\tau)$ 描述, 定义为

$$\sigma_\phi^2(\tau) = \frac{1}{2} \left\langle (\delta\bar{\Phi}_{k+1} - \delta\bar{\Phi}_k)^2 \right\rangle, \tau = mT_c \quad (31)$$

$\delta\bar{\Phi}_i$ 与 δy_i 均为随机变量。 $\delta\bar{\Phi}_k$ 由式(28)可以得到与拉曼光相位噪声 $\delta\phi_i$ 的关系为

在 $[-mT_c/2, mT_c/2]$ 内不是连续函数, 因此, $\delta\Phi$ 在 $[t_k, t_k + mT_c]$ 内求平均不能像式(9)一样直接积分。引入新的敏感函数

参考式(21)~(24),得到原子干涉仪的灵敏度与 $\delta\phi_i$ 的自相关函数关系为

$$\sigma_y^2(\tau) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{g}(t_1) dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{g}(t_2) dt_2 R_\phi''(t_1, t_2) \quad (34)$$

式中: $R_\phi''(t_1, t_2) = -\langle \phi'(t_1)\phi'(t_2) \rangle$ 。

自相关函数与相位噪声功率谱密度 $S_\phi(f)$ 的关系为

$$R_\phi''(t_1, t_2) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 S_\phi(f) e^{i2\pi f(t_1-t_2)} df \quad (35)$$

将式(35)代入式(34)中,使 $\bar{g}(t)$ 作傅里叶变换,得到

$$\sigma_\phi^2(\tau) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(mT_c\omega/2)}{m^2 \sin^2(T_c\omega/2)} |G(\omega)|^2 \omega^2 S_\phi(\omega) d\omega \quad (36)$$

式中: $\omega G(\omega)$ 一般被定义为原子干涉仪单次测量的相位噪声传递函数 $H(\omega)$ 。

来源于拉曼光反射镜振动噪声引入的相位噪声 $\delta\phi_i = \vec{k}_{\text{eff}} \cdot \delta\vec{\xi}_i$,其中, \vec{k}_{eff} 为拉曼光的有效波矢; $\delta\vec{\xi}_i$ 为拉曼光反射镜的振动位移。利用加速度噪声和位移噪声的自相关函数关系为

$$\begin{aligned} R_a(t_1, t_2) &= \langle \xi''(t_1)\xi''(t_2) \rangle = \omega^4 R_\xi(t_1, t_2) \\ &= R_\phi(t_1, t_2) \frac{\omega^4}{k_{\text{eff}}^2} \end{aligned} \quad (37)$$

将式(37)代入式(34)和式(35)中,可以获得振动加速度噪声功率谱 $S_a(\omega)$ 对应的单次测量传递函数 $|H_0(\omega)|^2 = \omega^{-4} |k_{\text{eff}}\omega G(\omega)|^2$ 。式(36)画下横线部分为阿伦方差中相位噪声的传递函数 $|H_\phi^\lambda(\omega)|^2$,而振动加速度噪声功率谱 $S_a(\omega)$ 对应的阿伦方差中的传递函数为 $|H_A(\omega)|^2 = \omega^{-4} |k_{\text{eff}}H_\phi^\lambda(\omega)|^2$ 。 $H_\phi^\lambda(\omega)$ 和 $H_A(\omega)$ 为利用阿伦方差从一系列重复测量数据中分析原子干涉仪的灵敏度,包含了对数据分组平均处理的滤波因子。

若原子干涉仪的灵敏度由于干涉相位 $\delta\Phi$ 的修正阿伦方差描述

$$\sigma_\phi^2(\tau) = \frac{1}{2m^2} \left\langle \left\{ \sum_{\lambda=1}^m (\delta\Phi_{k+\lambda} - \delta\Phi_k) \right\}^2 \right\rangle \quad (38)$$

其中, $\delta\Phi_k$ 表示为

$$\begin{aligned} \delta\Phi_k &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \int_{t_k + (i-1)T_c + (\lambda-1)T_c}^{t_k + iT_c + (\lambda-1)T_c} \\ &g\left(t - t_k - (\lambda + i)T_c + \frac{3T_c}{2}\right) \frac{d\phi}{dt} dt \end{aligned} \quad (39)$$

式中: $t_k = kmT_c - T_c/2$ 。定义新的敏感函数为

$$\begin{aligned} \bar{g}^\lambda(t) &= \sum_{\lambda=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{m-1} [g(t - (k+1)mT_c - (\lambda+i)T_c) - \\ &g(t - kmT_c - (\lambda+i)T_c)] \end{aligned} \quad (40)$$

将式(40)代入式(34)中,可以推导出 $\sigma_\phi^2(\tau)$ 的表达式为

$$\sigma_\phi^2(\tau) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin^6(mT_c\omega/2)}{m^4 \sin^4(mT_c\omega/2)} |G(\omega)|^2 \omega^2 S_\phi(\omega) d\omega \quad (41)$$

式(41)画下横线部分定义了修正阿伦方差中的相位噪声传递函数 $|H_\phi^m(\omega)|^2$,此时,振动加速度噪声的传递函数为 $|H_M(\omega)|^2 = \omega^{-4} |k_{\text{eff}}H_\phi^m(\omega)|^2$ 。

式(36)和式(41)给出了存在测量死区的原子干涉仪灵敏度函数与噪声功率谱的关系,同时也是AVAR和MAVAR处理非连续测量物理量时的频域表达式。

2 原子干涉仪的灵敏度分析

2.1 时域内的阿伦方差分析

上述三种阿伦方差对原子干涉仪的同一输出数据序列 $\{y_i\}$ 计算结果如图5所示。OAVAR相当于对AVAR曲线做了一次平滑,当平均时间 $\tau(=m\tau_0, \tau_0=1\text{s})$ 小于10s时,MAVAR相对AVAR下降更快,对高频噪声抑制效果更加明显。由式(7)和式(8)可知,MAVAR公式中大括号内的表达式相当于对所有一阶差分 Δ_i 再进行了一次滑动平均,式中的 m 可以理解为平滑窗口大小^[24],因此,

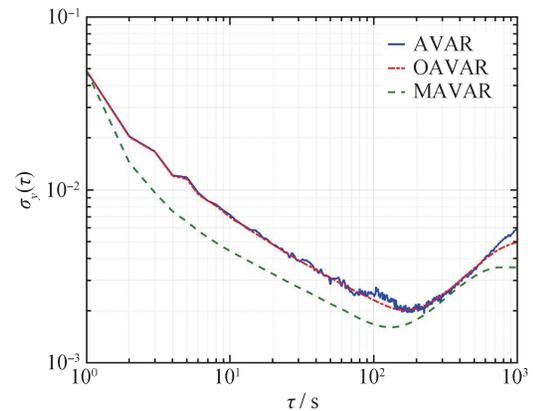


图5 三种阿伦方差对原子干涉仪的同一输出数据序列计算结果

Fig.5 Calculation results of three Allan variances on the same output data sequence of atomic interferometer

MAVAR对于高频噪声能够起到更强的滤波效果,但平滑窗口过大,平均时间超过100 s后,对噪声的高频分量滤波效果将会降低,这时与AVAR的区别就不大。

图6单独考虑了AVAR和MAVAR对调相白色噪声(WPM)的分辨能力。若将五类典型噪声的功率谱 $S(f)$ ($S(f) = b_\alpha f^\alpha$, $\alpha = \pm 2, \pm 1, 0$)分别替代式(36)和式(41)中的 $S_\phi(\omega)$ 进行积分计算,结果为^[6]

$$S(f) \sim f^\alpha, \sigma_y(\tau) \sim \tau^{\mu/2},$$

$$\text{AVAR: } \alpha = 2, \mu = -2; \alpha = -2, \pm 1, 0, \mu = -\alpha - 1$$

$$\text{MAVAR: } \alpha = \pm 2, \pm 1, 0, \mu = -\alpha - 1$$
(42)

因此,通过 $\log \sigma_y(\tau) - \log \tau$ 双对数曲线的不同斜率就能分辨出各类噪声。但AVAR不能将WPM和FPM这两类高频噪声分开,因为 $\alpha = 2$ 和 $\alpha = 1$ 时的 μ 相同。图6中两条虚线包含了上述五类噪声,权重因子相同,即 $b_\alpha = 10^{-5}$,而两条实线则令 $b_2 = 0$ 。 τ 较小时,两条AVAR曲线的斜率都是 $k = -1$,而MAVAR曲线在有无WPM时的斜率分别为 $k = -3/2$ 和 $k = -1$ 。另外,WPM对MAVAR的最低点影响很小,而AVAR却相差近一个量级。评估原子干涉仪的长期稳定性一般考虑 $S(f) = b_{-1} f^{-1}$ 的FFM对系统的影响,也就是阿伦方差曲线最低点斜率为零的平坦位置。因此采用MAVAR来抑制高频噪声对原子干涉仪长期稳定性评估的影响是更合适的。当平均时间 τ 足够大时,两种方差计算值

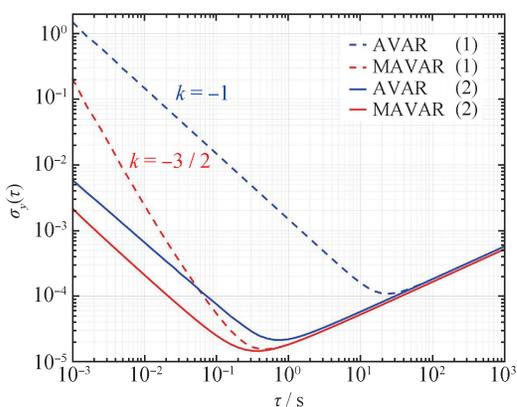


图6 AVAR和MAVAR分别计算有WPM噪声(虚线)和无WPM噪声(实线)时的结果对比

Fig.6 Comparison of results of AVAR and MAVAR variances with (dashed line) and without (solid line) WPM noise

差别不大,MAVAR要比AVAR稍微小一点。

2.2 频域内的阿伦方差分析

原子干涉仪在野外、船舶和机载平台上工作时,必须要考虑环境振动噪声对干涉仪灵敏度的影响。通过阿伦方差 $\sigma_\phi(\tau)$ 与振动加速度噪声功率谱 $S_a(\omega)$ 在频域中的关系,可以计算振动噪声对干涉仪灵敏度的影响。阿伦方差公式中对数据的一阶差分和平滑处理会使原子干涉仪中单次测量的振动噪声传递函数 $H_0(\omega)$ 被调制。图7给出了 $H_0(\omega)$ 、 $H_A(\omega)$ 和 $H_M(\omega)$ 三种传递函数随频率 f 变化的特征。黑色实线是原子干涉仪单次干涉周期内的振动噪声传递函数 $H_0(\omega)$; $H_A(\omega)$ 和 $H_M(\omega)$ 分别为AVAR和MAVAR中的振动噪声传递函数。其中,虚线和实线的平均时间分别为 $\tau = 10T_c$ 和 $\tau = 100T_c$ 。图7中计算所用参数为 $T_c = 1$ s, $T = 0.25$ s, 拉曼光波长为780 nm, $\pi/2$ 脉冲时间 $\tau_R = 2$ μ s。

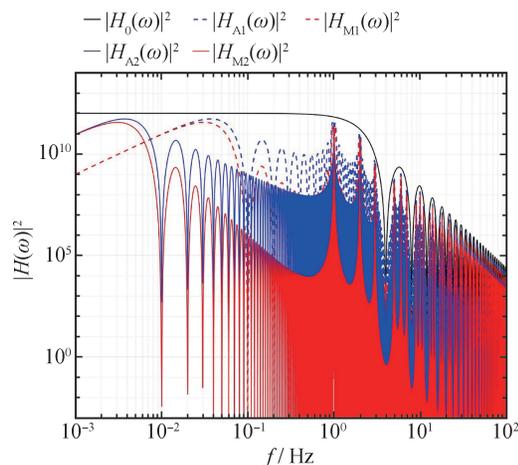


图7 原子干涉仪的传递函数比较

Fig.7 Comparison of transfer functions of atomic interferometer

$H_0(\omega)$ 的包络在 $f > 1$ Hz时随 f 线性下降,在低频段 $f \leq 1$ Hz时为常值,表明原子干涉仪对振动噪声是一个低通滤波器,这因为在原子干涉仪的一个干涉周期 T_c 内,拉曼光与原子的作用时间很短($\tau_R \ll T < T_c/2$),所以导致高频振动噪声通过拉曼光反射镜进入干涉相位 $\delta\Phi$ 的值很小。 $H_A(\omega)$ (蓝色曲线)和 $H_M(\omega)$ (红色曲线)的包络均受到 $H_0(\omega)$ 的调制。对于 τ 相同时, $H_M(\omega)$ 对高频段噪声抑制能力比 $H_A(\omega)$ 更强,但两者都对低频段噪声抑制能力较弱。因此对原子干涉仪短期灵敏度和长期稳定性影响最大的都是振动噪声的低频段,当 τ

较小时, 对 $\sigma_\phi(\tau)$ 起主要贡献的低频段要向高频段延伸。

图7中的 $H_0(\omega)$ 在 $f_n = nf_0$ 时处于零点位置, $f_0 = 1/T$ 为干涉仪的特征频率, 而 $f_c = 1/T_c$ 定义为原子干涉仪的数据采样频率。 $H_M(\omega)$ 和 $H_A(\omega)$ 的分子比 $H_0(\omega)$ 多了因子 $\sin(mT_c\omega/2)$, 零点数目随 m 增加而变得更密集; 而分母多增加的因子 $\sin(T_c\omega/2)$ 导致噪声频率为干涉仪采样频率整数倍 $f_n = nf_c$ 时, $H_M(\omega)$ 和 $H_A(\omega)$ 是该频率附近的极值, 称为传递函数的次极点位置。MAVAR 比 AVAR 在时域上多了一次滑动平均, 因此, $H_M(\omega)$ 比 $H_A(\omega)$ 在次极点位置更加尖锐, 而 τ 越长, 则会增强这种特征, 只剩下噪声功率谱 $S_a(\omega)$ 中离散的频率对原子干涉仪灵敏度产生影响。有如下近似^[7]关系

$$\tau = mT_c \rightarrow \infty, \frac{2 \sin^4(mT_c\omega/2)}{m^2 \sin^2(T_c\omega/2)} \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - j2\pi f_c) \quad (43)$$

将式(43)代入式(36)中可以得到相位噪声功率谱 $S_\phi(\omega)$ 与干涉仪灵敏度的关系^[35]为

$$\sigma_\phi^2(\tau) = \frac{1}{\tau} \sum_{n=1}^{\infty} |H(2\pi n f_c)|^2 S_\phi(2\pi n f_c) \quad (44)$$

同样, 也可以得到振动加速度噪声功率谱 $S_a(\omega)$ 与干涉仪灵敏度的关系为

$$\sigma_\phi^2(\tau) = \frac{k_{\text{eff}}^2}{\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|H(2\pi n f_c)|^2}{(2\pi n f_c)^4} S_a(2\pi n f_c) \quad (45)$$

原子干涉仪的灵敏度主要受限于干涉仪采样频率 f_c 整倍数的噪声成分影响, 这种因采样频率而出现的现象被称为噪声的频率混叠效应, 它与原子钟中的 Dick 效应类似^[36-39], 是导致原子干涉仪系统灵敏度降低的原因之一^[2]。振动噪声各频率对干涉仪灵敏度的影响在式(45)中比相位噪声在式(44)中多了一个衰减因子 $(2\pi n f_c)^{-4}$, 若只考虑振动引入的等效相位噪声, 干涉仪灵敏度受低频噪声影响更大。

原子干涉仪进行惯性量(角速度和加速度)测量时, 存在测量死区。一个原子干涉周期内, 死区时间越长, 则 T_c/T 比值越大, 干涉时间 T 被包含在敏感函数 $g(t)$ 的傅里叶变换 $G(\omega)$ 内。

$H_M(\omega)$ 随 T_c/T 的改变如图8所示, 黑色实线是原子干涉仪单次干涉周期内的振动噪声传递函数 $H_0(\omega)$ 。图8中计算所用参数为 $\tau = 100T_c$, $T = 0.25$ s, 其余参数及含义与图7一致。在 $H_0(\omega)$ 的两个零点位置间, 蓝色曲线($T_c/T = 2$)比红色曲线($T_c/T = 4$)的次极大位置少了2个, 而绿色曲线($T_c/T = 1$)出现时, 所有次极大位置都消失, 表明原子干涉仪测量过程无死区是其灵敏度提升的一种途径, 此时振动噪声对干涉仪的灵敏度影响最小。在三脉冲拉曼光 Mach-Zehnder 构型的原子干涉仪中, T 的最大值只能是 $T_c/2$ 。

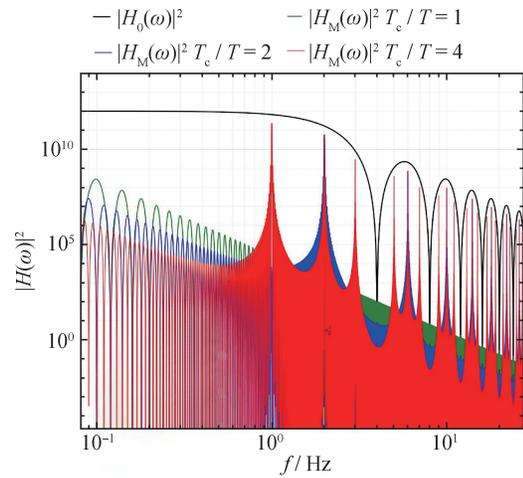


图8 原子干涉仪测量死区对传递函数 $H_M(\omega)$ 的影响

Fig.8 Effect of measurement dead zone of atomic interferometer on transfer function

若拉曼光的相位噪声功率谱 S_ϕ 和振动加速度噪声功率谱 S_a 都是白噪声, 式(44)和式(45)可以进一步简化; 若只保留 $G(\omega)$ 中小量 τ_w/T 的一阶量, 且满足 $\tau/T_c \gg 1$ 时, 原子干涉仪灵敏度受到这两类噪声的影响可以简单计算^[7]为

$$\sigma_\phi^2(\tau) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{T_c}{\tau} \frac{S_\phi}{\tau_R} \quad (46)$$

$$\sigma_\phi^2(\tau) = \frac{k_{\text{eff}}^2 T^4}{2} \left(\frac{2T_c}{3T} - 1\right) \frac{S_a}{\tau} \quad (47)$$

原子干涉仪的灵敏度不仅直接正比于 S_ϕ 和 S_a , 还受到拉曼光脉冲作用时间 τ_R 和死区时间等因素的影响。通过更好的稳频技术和隔振技术(包括利用经典加速度计来补偿振动相位)可以直接降低 S_ϕ 和 S_a 来提高干涉仪灵敏度。而式(46)表明通过增加拉曼光与原子作用时间 τ_R , 也可以减小拉

曼光相位噪声对原子干涉仪灵敏度的影响,但较长的作用时间又会减少进入干涉区域的原子数,增加探测噪声,因此还需要综合考虑。如图9所示, $T_d (= T_c - 2T)$ 为一个干涉周期 T_c 内的死区,干涉时间 T 取固定值 0.25 s, 纵坐标 $\sigma_\phi / \sigma_{\phi_0}$ 中的 σ_{ϕ_0} 是死区为零时 $\sigma_\phi(\tau)$ 的计算值。式(47)和图9表明:干涉时间 T 相同,不存在测死区(T_c/T 值最小时),原子干涉仪对惯性量的测量灵敏度最高;当死区占比接近 50%,则灵敏度衰减近一半。因此,通过连续制备原子源或者交替运行多个干涉仪来减少甚至消除测量死区,都是提升原子干涉仪系统灵敏度的有效路径^[2, 13]。

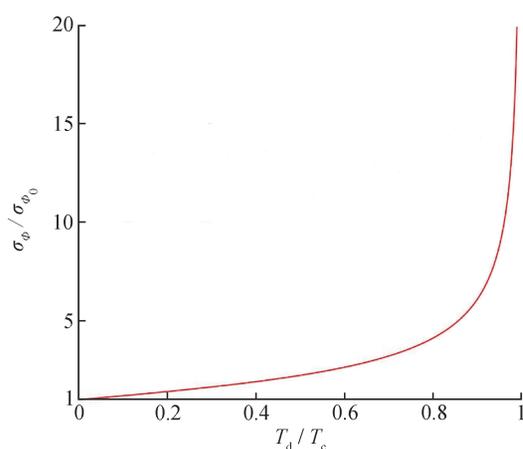


图9 原子干涉仪测量死区大小对灵敏度函数 $\sigma_\phi(\tau)$ 的影响

Fig.9 Effect of measurement dead zone size of atomic interferometer on sensitivity function $\sigma_\phi(\tau)$

3 结论

系统地给出了阿伦方差、重叠阿伦方差和修正阿伦方差三种常见形式在时域和频域中的推导过程,MAVAR之所以比AVAR对高频噪声有更好的抑制能力是因为它对采样数据多了一次滑动平均。反映到频域上,MAVAR的传递函数比AVAR的传递函数在次极点位置更加尖锐,对高频噪声的频率分辨力更高。所以在 $\log \sigma_\phi(\tau) - \log \tau$ 双对数曲线图中,MAVAR能通过斜率区分五类典型噪声,而AVAR不能将调相白噪声($S(f) \sim f^2$)和调相闪烁噪声($S(f) \sim f^1$)这两类高频噪声区分。除此之外,MAVAR比AVAR更适合用来评估原子干涉仪的长期稳定性,并能更有效地抑制高频噪

声对阿伦方差最低点位置的影响。

基于阿伦方差的频域表达式,文中还给出了原子干涉仪灵敏度与噪声功率谱的关系,其噪声传递函数因为原子干涉仪存在测量死区而出现了更多次极点,引起频率混叠效应,造成原子干涉仪灵敏度下降。针对原子干涉仪在野外^[40]、船舶^[41]和机载平台^[42]上工作时必须考虑的环境振动噪声,指出了灵敏度提升的两条途径:一是消除原子干涉仪测量死区^[13];二是通过隔振技术^[43-45]或者振动相位补偿技术^[46]来降低噪声功率谱密度。

该研究可以推广到其它关于阿伦方差分析系统灵敏度的类似问题。对于存在测量死区的测量系统还包括脉冲方式工作的原子钟^[47]、磁力仪^[48]和自旋陀螺仪^[49]等。

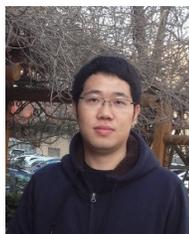
参考文献

- [1] HU Z K, SUN B L, DUAN X C, et al. Demonstration of an ultrahigh-sensitivity atom-interferometry absolute gravimeter[J]. *Physical Review A*, 2013, 88 (4): 043610.
- [2] DUTTA I, SAVOIE D, FANG B, et al. Continuous cold-atom inertial sensor with 1 nrad/sec rotation stability[J]. *Physical Review Letters*, 2016, 116 (18): 183003.
- [3] FIXLER J B, FOSTER G T, MCGUIRK J M, et al. Atom interferometer measurement of the newtonian constant of gravity[J]. *Science*, 2007, 315 (5808): 74-77.
- [4] YU C, ZHONG W, ESTEY B, et al. Atom-interferometry measurement of the fine structure constant[J]. *Annalen der Physik*, 2019, 531 (5): 1800346.
- [5] ASENBAUM P, OVERSTREET C, KIM M, et al. Atom-interferometric test of the equivalence principle at the 10^{-12} level[J]. *Physical Review Letters*, 2020, 125 (19): 191101.
- [6] ALLAN D W. Historicity, strengths, and weaknesses of Allan variances and their general applications[J]. *Gyroscopy and Navigation*, 2016, 7 (1): 1-17.
- [7] CHEINET P, CANUEL B, DOS SANTOS F P, et al. Measurement of the sensitivity function in a time-domain atomic interferometer[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2008, 57 (6): 1141-1148.
- [8] GOUËT J L, MEHLSTÄUBLER T E, KIM J, et al. Limits to the sensitivity of a low noise compact atomic gravimeter[J]. *Applied Physics B*, 2008, 92 (2): 133-144.
- [9] SHEIMY N E, HOU H, NIU X. Analysis and modeling of inertial sensors using Allan variance[J]. *IEEE Transac-*

- tions on Instrumentation and Measurement, 2008, 57 (1): 140–149.
- [10] NAZAROVA T. Towards the quantum noise limit in Ramsey - Bordé atom interferometry [D]. Gottfried Wilhelm Leibniz University Hannover, 2007.
- [11] PETERS A, CHUNG K Y, CHU S. High-precision gravity measurements using atom interferometry [J]. *Metrologia*, 2001, 38 (1): 25.
- [12] SORRENTINO F, BODART Q, CACCIAPUOTI L, et al. Sensitivity limits of a Raman atom interferometer as a gravity gradiometer [J]. *Physical Review A*, 2014, 89 (2): 023607.
- [13] SAVOIE D, ALTORIO M, FANG B, et al. Interleaved atom interferometry for high-sensitivity inertial measurements [J]. *Science Advances*, 2018, 4 (12): eaau7948.
- [14] PEI H, FAN W, DU P, et al. Markov noise in atomic spin gyroscopes: analysis and suppression based on Allan deviation [J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2023, 72: 1–9.
- [15] GANTER W A. Modeling of atomic clock performance and detection of abnormal clock behavior [M]. US National Bureau of Standards, 1973.
- [16] BOARD I. IEEE standard specification format guide and test procedure for single-axis interferometric fiber optic gyros [J]. *IEEE Std*, 1998: 952–1997.
- [17] RIEHLE F. Frequency standards: basics and applications [M]. John Wiley & Sons, 2006.
- [18] SCHMIDT L S. Estimation in the presence of fractionally integrated noise: an application to atomic timescales [M]. American University, 2001.
- [19] AUDOIN C, DIMARCQ N. Stochastic models of stable frequency and time sources and their relationship [J]. *IEEE transactions on instrumentation and measurement*, 1993, 42 (3): 682–688.
- [20] CHAFFEE J W. Relating the Allan variance to the diffusion coefficients of a linear stochastic differential equation model for precision oscillators [J]. *IEEE Transactions on Ultrasonics Ferroelectrics and Frequency Control*, 1987, 34: 655–658.
- [21] GALLEANI L, SACERDOTE L, TAVELLA P, et al. A mathematical model for the atomic clock error [J]. *Metrologia*, 2003, 40 (3): S257.
- [22] ALTORIO M. Novel atom interferometry techniques for a cold-atom gyroscope of large Sagnac area [D]. Sorbonne Université, 2019.
- [23] 张桂才. 光纤陀螺原理与技术 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2008.
- ZHANG G C. The principles and technologies of fiber-optic gyroscope [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2008. (in Chinese)
- [24] 刘英乾, 陈强, 薛仁魁, 等. 修正的阿伦方差对调相闪烁噪声的抑制 [J]. *中国空间科学技术*, 2019, 39 (4): 68–72.
- LIU Y Q, CHEN Q, XUE R K, et al. Study on the inhibition effect of modified Allan variance on flicker PM noise [J]. *Chinese Space Science and Technology*, 2019, 39 (4): 68–72. (in Chinese)
- [25] ALLAN D W, BARNES J A. A modified Allan variance with increased oscillator characterization ability [C]. Thirty Fifth Frequency Control Symposium (Ft. Monmouth, NJ), 1981: 470 – 475.
- [26] SULLIVAN D B, ALLAN D W, HOWE D A, et al. Characterization of clocks and oscillators [M]. US Department of Commerce, National Institute of Standards and Technology, 1990.
- [27] BARNES J A, CHI A R, CUTLER L S, et al. Characterization of frequency stability [J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, IM–20(2): 105–120.
- [28] ALLAN D W, SHOAF J H, HALFORD D J T, et al. Statistics of time and frequency data analysis [J]. *Time and frequency: theory and fundamentals*, 1974: 151.
- [29] ALLAN D W. Statistics of atomic frequency standards [J]. 1966, 54 (2): 221–230.
- [30] RILEY W J. MDEV versus ADEV [EB/OL]. [2022–12–20]. <http://www.stable32.com/MDEV%20Versus%20ADEV.pdf>.
- [31] RILEY W J, HOWE D A. Handbook of frequency stability analysis [M]. NIST Special Publication 1065, National Institute of Standards and Technology, 2008.
- [32] MAKDISSI A, VERNOTTE F, CLERCQ E D, et al. Stability variances: a filter approach [J]. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 2010, 57 (5): 1011–1028.
- [33] GUSTAVSON T L. Precision rotation sensing using atom interferometry [D]. Stanford University, 2000.
- [34] 季俊云, 王宇. 拉曼激光相位噪声对原子干涉重力仪测量分辨率的影响 [J]. *计测技术*, 2015, 35 (6): 14–19.
- JI J Y, WANG Y. Influence of Raman laser phase noise on the measurement resolution of atomic gravimeter [J]. *Metrology & Measurement Technology*, 2015, 35 (6): 14–19. (in Chinese)
- [35] 白金海, 胡栋, 贡昊, 等. 用于原子干涉仪的光学锁相环系统 [J]. *计测技术*, 2020, 40 (6): 26–30.

- BAI J H, HU D, GONG H, et al. An optical phase-lock loop system for atom interferometers[J]. *Metrology & Measurement Technology*, 2020, 40(6): 26–30. (in Chinese)
- [36] 黄家强. 冷铯原子微波频标新方案探索与研究[D]. 清华大学, 2016.
- HUANG J Q. Exploration and study on new schemes for cold cesium microwave frequency standard[D]. Tsinghua University, 2016. (in Chinese)
- [37] BIEDERMANN G W, TAKASE K, WU X, et al. Zero-dead-time operation of interleaved atomic clocks [J]. *Physical Review Letters*, 2013, 111 (17): 170802.
- [38] DANET J M, LOURS M, GUÉRANDEL S, et al. Dick effect in a pulsed atomic clock using coherent population trapping [J]. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 2014, 61 (4): 567–574.
- [39] SANTARELLI G, AUDOIN C, MAKDISSI A, et al. Frequency stability degradation of an oscillator slaved to a periodically interrogated atomic resonator[J]. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 1998, 45 (4): 887–894.
- [40] STRAY B. A portable cold atom gravity gradiometer with field application performance[D]. University of Birmingham, 2021.
- [41] BIDEI Y, ZAHZAM N, BLANCHARD C, et al. Absolute marine gravimetry with matter-wave interferometry [J]. *Nature Communications*, 2018, 9 (1): 627.
- [42] GEIGER R, MÈNORET V, STERN G, et al. Detecting inertial effects with airborne matter-wave interferometry [J]. *Nature Communications*, 2011, 2 (1): 474.
- [43] GONG W, LI A, HUANG C, et al. Effects and prospects of the vibration isolation methods for an atomic interference gravimeter[J]. *Sensors*, 2022, 22 (2): 583.
- [44] ZHOU M K, HU Z K, DUAN X C, et al. Performance of a cold-atom gravimeter with an active vibration isolator [J]. *Physical Review A*, 2012, 86 (4): 043630.
- [45] 王吉鹏, 胡栋, 白金海, 等. 原子干涉重力仪隔振方法的研究现状及展望[J]. *计测技术*, 2020, 40 (6): 15–20.
- WANG J P, HU D, BAI J H, et al. Review on vibration isolation method of atom-interferometric gravimeter [J]. *Metrology & Measurement Technology*, 2020, 40 (6): 15–20. (in Chinese)
- [46] MÈNORET V, VERMEULEN P, MOIGNE N L, et al. Gravity measurements below $10^{-9}g$ with a transportable absolute quantum gravimeter[J]. *Scientific Reports*, 2018, 8 (1): 1–11.
- [47] GODONE A, MICALIZIO S, LEVI F. Pulsed optically pumped frequency standard [J]. *Physical Review A*, 2004, 70(2): 023409.
- [48] BUDKER D, ROMALIS M. Optical magnetometry [J]. *Nature Physics*, 2007, 3(4): 227–234.
- [49] SORENSEN S S, THRASHER D A, WALKER T G. A synchronous spin-exchange optically pumped nmr-gyroscope[J]. *Applied Sciences*, 2020, 10(20): 7099.

(本文编辑: 郑燕)



第一作者: 邓敏(1989—), 男, 湖南湘乡人, 工程师, 博士, 主要从事量子精密测量技术研究, 2018年7月毕业于清华大学物理学专业。



通讯作者: 汪之国(1982—), 男, 山东临清人, 副教授, 博士, 主要从事量子精密测量技术研究。2010年6月毕业于国防科技大学光学工程专业, 主持国家自然科学基金项目、国防科研项目等10余项, 发表学术论文80余篇。