

doi: 10.11823/j.issn.1674-5795.2023.04.07

原子磁力仪的量子物理基础

李胜, 周超

(北京大学 电子学院 量子信息技术中心, 北京 100871)

摘要: 原子磁力仪是基于量子技术实现的一种精密测量仪器, 鉴于其广泛的应用前景, 目前成为了国内外热门研究。原子磁力仪中涉及了大量的量子物理原理, 对其中一些基础量子物理的掌握, 有助于开展并深入研究磁力仪相关工作。作者对原子磁力仪中所涉及的量子物理基础进行阐述, 包括: 光泵浦、光频移、光探测、原子极化在磁场中的演化以及磁共振等。

关键词: 精密测量; 原子磁力仪; 光泵浦; 磁共振

中图分类号: TB939

文献标志码: A

文章编号: 1674-5795(2023)04-0095-08

Quantum fundamentals of atomic magnetometer

LI Sheng, ZHOU Chao

(Department of Electronics, and Center for Quantum Information Technology, Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract: Atomic magnetometer is a precision measurement instrument based on quantum technology. Due to its extensive application potential, it is becoming the domestic and worldwide cutting-edge research. Atomic magnetometer concerns many quantum theories, and a grasp of the basics is helpful to carrying out the magnetometer related work and going in for a deeper research in the related areas. The author summaries some of the elementary quantum physics involved in the atomic magnetometer, including optical pumping, light shift, optical detection, evolution of atomic polarization in magnetic field, and magnetic resonance, etc.

Key words: precision measurement; atomic magnetometer; optical pumping; magnetic resonance

0 引言

原子磁力仪是通过光泵浦技术来极化原子, 并测量极化的原子在磁场中的运动特性实现对磁场的测量^[1]。光泵浦是使用圆偏振、线偏振等偏振光场来有选择性地和处于某些量子态的原子发生相互作用, 并通过原子的受激跃迁和自发辐射两个过程实现原子的抽运, 使得原子在能级上存在不均匀的分布, 从而形成极化的原子系统^[2]。常用于实现磁力仪装置的原子有碱金属原子(Na、K、

Rb、Cs)、亚稳态氦原子(³He、⁴He)以及惰性气体原子。惰性气体原子采用的是核自旋不为零的同位素, 这种原子不能够直接通过光泵浦技术来极化, 而是需要通过与其它原子碰撞, 产生自旋交换效应来实现原子的极化^[3]。极化原子在磁场中的运动特性一般是通过极化原子对光场的吸收或色散特性来探测的, 然后再利用外加射频场所产生的磁共振效应, 最终可以实现对磁场强度的测量^[4]。这种磁共振效应也可以通过调制光场的光强、频率、偏振等实现^[5-6]。另外, 也可以通过非

收稿日期: 2022-12-26; 修回日期: 2023-02-22

基金项目: 国家自然科学基金青年科学基金资助项目(62201013)

引用格式: 李胜, 周超. 原子磁力仪的量子物理基础[J]. 计测技术, 2023, 43(4): 95-102.

Citation: LI S, ZHOU C. Quantum fundamentals of atomic magnetometer[J]. Metrology & Measurement Technology, 2023, 43(4): 95-102.



共振效应来探测极化原子在磁场中的运动,例如,非线性磁光旋转^[7]等。用于实现磁力仪的原子通常是密封于透明的玻璃气室中,气室中各种碰撞过程(如自旋交换碰撞、自旋破坏碰撞等)会给原子的极化带来弛豫,从而影响磁探测灵敏度。减少这些碰撞带来的弛豫的影响,能够提升原子磁力仪的性能^[8]。例如:无自旋交换弛豫(Spin-exchange relaxation free, SERF)磁力仪通过消除自旋交换碰撞弛豫,实现了磁探测灵敏度堪比,甚至超过由超导量子干涉装置(Superconducting Quantum Interference Device, SQUID)实现的磁力仪^[9-11],这在生物医学上有重要的应用价值^[12-13]。

原子磁力仪中核心量子物理基础内容包括:原子与光场的相互作用以及原子与磁场的相互作用,本文将重点对这两部分内容进行阐述。内容安排如下:第一节对原子与光场的相互作用进行阐述,包括光泵浦、原子密度矩阵、不可约张量算符、等效哈密顿量、光频移效应、光吸收效应以及原子的极化;第二节对原子与磁场的相互作用进行阐述,包括一阶、二阶原子极化在磁场中的演化方程以及磁共振效应等;第三节对文章内容进行总结。

1 原子与光场的相互作用

在原子磁力仪中,光场不仅可以用来极化原子,也可以用于探测原子的极化状态。本节将对原子与光场相互作用的物理效应以及数学描述进行阐述。

1.1 光泵浦

光泵浦是利用受激吸收和自发辐射两个过程实现原子在能级之间的转移的。以亚稳态⁴He原子的D₀跃迁为例来进行说明,如图1所示,基态角动量量子数为 $j_g = 1$,因此有3个磁子能级;激发态角动量量子数为 $j_e = 0$,因此只有1个磁子能级。当施加1个右旋圆偏振光 σ^- ,基态磁量子数为 $m_g = +1$ 的原子会吸收1个右旋圆偏振的光子,受激跃迁到磁量子数为 $m_e = 0$ 的激发态。激发态原子在自发辐射的作用下会不断跃迁到基态的3个磁子能级上。因此,在受激吸收和自发辐射两个过程的作用下,基态中磁子能级为 $m_g = +1$ 的原子会不断被转移到其它2个磁子能级上,这个过程称为“光泵浦”或“光抽运”。光泵浦会使原子不均匀地分布在磁子能级上,宏观上,原子会形成非零磁矩。

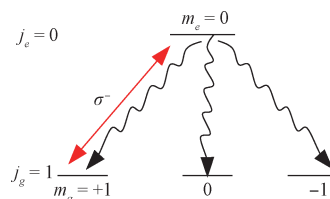


图1 ⁴He原子D₀跃迁

Fig.1 D₀ transition of ⁴He atom

1.2 原子系综的描述

在原子磁力仪中,通常处理的是由大量原子构成的原子系综,而非单个原子的演化问题。对于单个原子,可以用右矢 $|\psi\rangle$ 进行描述,其随时间的演化满足薛定谔方程;对于一个原子系综,则需要用密度矩阵(算符) $\hat{\rho}$ 进行描述,其随时间的演化满足刘维尔方程,即

$$i\hbar \frac{d\hat{\rho}}{dt} = [\hat{H}, \hat{\rho}] \quad (1)$$

式中: \hat{H} 为系统的哈密顿量。

对于一个封闭的原子系统,密度矩阵的一般定义为

$$\hat{\rho} = \sum_{\psi} p_{\psi} |\psi\rangle\langle\psi| \quad (2)$$

式中: p_{ψ} 为粒子处于量子态 $|\psi\rangle$ 的几率,并且满足

$$\text{Tr}\hat{\rho} = \sum_{\psi} p_{\psi} = 1 \quad (3)$$

当粒子处于某一量子态的几率为1时,则称系统处于“纯态”;否则,则称为“混态”。可以证明

$$\text{Tr}(\hat{\rho}^2) \leq 1 \quad (4)$$

当且仅当系统处于纯态时取等。因此, $\text{Tr}(\hat{\rho}^2) = 1$ 可以作为系统处于纯态的判定条件。

1.3 不可约张量算符

在讨论原子的磁相互作用时,通常会将密度矩阵用不可约张量算符展开进行分析,而不是直接分析密度矩阵,这是因为,不同阶数的不可约张量在磁场中的演化互不干扰,从而简化了分析。一组正交、归一、完备的不可约张量算符定义为

$$\hat{T}_q^{(k)}(j'j) = \sum_{mm'} (-1)^{j-m'} C(j'k; m, -m', q) |jm\rangle\langle j'm'| \quad (5)$$

式中: $|j-j'| \leq k \leq j+j'$, $-k \leq q \leq k$; $C(j'k; m, -m', q) = \langle j, m; j', -m' | kq \rangle$ 为 Clebsch-Gordan 系数。

不可约张量算符满足基本性质:

- ①厄米性: $(\hat{T}_q^{(k)}(jj'))^\dagger = (-1)^{j'-j+q}\hat{T}_{-q}^{(k)}(j'j)$;
 - ②正交归一性: $\text{Tr}\left[\hat{T}_q^{(k)}(jj')\left(\hat{T}_q^{(k)}(jj')\right)^\dagger\right] = \delta_{kk'}\delta_{qq'}$
- $\hat{T}_q^{(k)}(jj)$ 和角动量算符之间的基本对易关系式:
- ① $[\hat{J}_z, \hat{T}_q^{(k)}(jj)] = q\hbar\hat{T}_q^{(k)}(jj)$;
 - ② $[\hat{J}_\pm, \hat{T}_q^{(k)}(jj)] = \hbar\sqrt{k(k+1)-q(q\pm 1)}\hat{T}_{q\pm 1}^{(k)}(jj)$ 。

其中, 升降算符的定义为 $\hat{J}_\pm = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y$ 。角动量算符本身也是一阶不可约张量算符, 和 $\hat{T}_q^{(1)}(jj)$ 之间满足关系式 (6)。

$$\hat{J}_q = \hbar \sqrt{\frac{1}{3}j(j+1)(2j+1)}\hat{T}_q^{(1)}(jj) \quad (6)$$

式中: $\hat{J}_{\pm 1} = \mp(\hat{J}_x \pm i\hat{J}_y)/\sqrt{2}$, $\hat{J}_0 = \hat{J}_z$ 。

类似地, 可以定义不可约张量

$$Q_q^{(k)} = \sum_{mm'} (-1)^{j'-m'} C(jj'k; m, -m', q) e_m^* e_{m'} \quad (7)$$

式中: $e_{\pm 1} = \mp(e_x \pm ie_y)/\sqrt{2}$, $e_0 = e_z$; e_x, e_y, e_z 为三个坐标轴方向矢量。 $Q_q^{(k)}$ 的基本性质为^[14]

- ① $e_m e_n = -\sum_{kq} Q_q^{(k)} C(11k; mnq)$;
- ② $Q_q^{(k)*} = (-1)^{k+q} Q_{-q}^{(k)}$;
- ③ $Q_q^{(k)}: Q_q^{(k)*} = (-1)^q \delta_{kk'} \delta_{qq'}$;
- ④ $A \cdot Q_q^{(k)} = Q_q^{(k)} \cdot A$;
- ⑤ $A \times B = -\sqrt{2} i \sum_q (-1)^q A_q Q_q^{(1)} \cdot B$ 。

其中, A 和 B 是两个矢量。

1.4 等效哈密顿量与运动方程

等效哈密顿量是由 W. Happer 在 1967 年引入, 来描述光场对封闭系统中原子的影响^[14]。光场可以表示为

$$E = E_0 [e e^{i(k \cdot r - \omega t)} + \text{c.c.}] \quad (8)$$

式中: E_0 为光强, e 为单位光极化矢量, k 为光波矢, ω 为光角频率, “c. c.” 为复共轭。在弱场近似条件下, 光场对基态原子的作用可以等效为一个算符作用, 称为“等效哈密顿量”, 其表达式为

$$\delta\hat{H} = -\frac{E_0^2}{4} e^* \cdot \hat{\alpha} \cdot e \quad (9)$$

式中: $\hat{\alpha}$ 称为“极化率张量算符”, 表达式为

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{\hbar} \sum_c \int \frac{\hat{d}|e\rangle\langle e|\hat{d}}{\omega_{eg} - \omega + k \cdot v - i(\Gamma_e/2 + \Gamma_c)} N(v) dv^3 \quad (10)$$

式中: \hat{d} 为电偶极矩算符, $|e\rangle$ 为激发态, ω_{eg} 为激发态和基态之间的跃迁角频率, v 为原子的运动速

度, $N(v)$ 为原子速率的正态分布函数, Γ_e 为激发态的自发辐射速率, Γ_c 为原子之间的碰撞速率。

光场对基态原子的影响为

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho} = \delta\hat{H}\hat{\rho} - \hat{\rho}\delta\hat{H}^\dagger \quad (11)$$

式中: $\hat{\rho}$ 为基态原子的密度矩阵。

等效哈密顿量 $\delta\hat{H}$ 并非一个厄米算符, $\delta\hat{H}^\dagger \neq \delta\hat{H}$ 。 $\delta\hat{H}$ 分解为

$$\delta\hat{H} = \delta\hat{\varepsilon} - \frac{i\hbar}{2} \delta\hat{\Gamma} \quad (12)$$

式中: $\delta\hat{\varepsilon}$ 为“光频移算符”, $\delta\hat{\Gamma}$ 为“光吸收算符”, 这两个算符均为厄米算符。因此, 光场对基态原子的影响可以表示为

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho} = [\delta\hat{\varepsilon}, \hat{\rho}] - \frac{i\hbar}{2} (\delta\hat{\Gamma}\hat{\rho} + \hat{\rho}\delta\hat{\Gamma}) \quad (13)$$

1.5 光频移效应

在原子磁力仪中, 光频移的存在一方面会影响磁测量的准确度, 另一方面, 光强噪声、光频噪声都可以通过光频移效应转化为磁测量噪声, 从而对磁测量灵敏度产生影响。本小节将对光频移效应进行介绍。

等式(13)右边第一项表示光场给基态原子带来的能级位移影响, 也称为“光频移”。根据式(12)可以得到光频移算符为

$$\delta\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\delta\hat{H} + \delta\hat{H}^\dagger) \quad (14)$$

引入系数

$$\kappa_{eg}(\Delta\omega) = \int \frac{1}{\Delta\omega + k \cdot v - i(\Gamma_e/2 + \Gamma_c)} N(v) dv^3 \quad (15)$$

式中: $\Delta\omega = \omega_{eg} - \omega$ 为光场的失谐量。则光频移算符可以表示为

$$\delta\hat{\varepsilon} = -\frac{E_0^2}{4} e^* \cdot \left\{ \frac{1}{\hbar} \sum_c \text{Re}[\kappa_{eg}(\Delta\omega)] \hat{d}|e\rangle\langle e|\hat{d} \right\} \cdot e \quad (16)$$

式中: $\text{Re}[\kappa_{eg}(\Delta\omega)]$ 为取 $\kappa_{eg}(\Delta\omega)$ 的实部。由于正态分布 $N(v)$ 关于中心 $v = 0$ 对称, 当 $\Delta\omega = 0$ 时, 可以计算得到 $\kappa_{eg} = 0$, 即, 在共振条件下, 光频移为零。因此, 只有在非共振条件下, 即, $\Delta\omega \neq 0$, 才会产生光频移效应。

$\delta\hat{\varepsilon}$ 是一个二阶张量算符, 为了分析光频移和光极化矢量的关系, 通常会用不可约张量算符对 $\delta\hat{\varepsilon}$ 进行展开。按不可约张量的阶数, 光频移可以分为标量、矢量和张量频移。标量光频移会使塞

曼子能级整体产生一个移动；矢量光频移的作用类似于磁场，会使塞曼子能级产生等间距的分裂，该效应可以用来替代射频线圈，产生射频场，在原子磁力仪中有较为广泛的应用^[15-16]；张量光频移的作用类似于非线性塞曼分裂，在磁力仪中被用作补偿非线性塞曼分裂的一种手段^[17-18]。极化率张量算符 $\hat{\alpha}$ 用 $\hat{T}_q^{(k)}$ 和 $Q_q^{(k)}$ 可以表示为^[14]

$$\hat{\alpha} = \sum_{kq} \hat{\alpha}_q^{(k)} Q_q^{(k)*} \quad (17)$$

其中，

$$\hat{\alpha}_q^{(k)} = \sum_j (-1)^{j-j_g} \kappa_{eg} \frac{\|\hat{\mathbf{d}}\|^2}{\hbar} (2j_e+1) W(j_g j_e k 1; 1 j_g) \cdot \hat{T}_q^{(k)}(j_g j_g) \quad (18)$$

式中： $\|\hat{\mathbf{d}}\| = \langle j_e \parallel \hat{\mathbf{d}} \parallel j_g \rangle$ 为基态到激发态的电偶极跃迁约化矩阵元， j_g, j_e 分别为基态和激发态角动量量子数， $W(j_g j_e k 1; 1 j_g)$ 为Racah系数。例如，对于⁴He原子的D₀跃迁， $j_g = 1, j_e = 0$ ，可以计算得到

$$\hat{\alpha} = -\kappa_{eg} \frac{\|\hat{\mathbf{d}}\|^2}{\hbar} \left(\frac{1}{3} \hat{T}_0^{(0)} Q_0^{(0)*} + \frac{1}{3} \sum_q \hat{T}_q^{(1)} Q_q^{(1)*} + \frac{3}{5} \sum_{q'} \hat{T}_{q'}^{(2)} Q_{q'}^{(2)*} \right) \quad (19)$$

为进一步简化表达式，引入矢量， $\mathbf{s} = \mathbf{ie} \times \mathbf{e}^*$ ，该矢量称为光子的“平均自旋”。利用角动量算符和不可约张量算符之间关系为

$$\begin{aligned} \hat{J}_q &= \hbar \sqrt{\frac{1}{3} j_g(j_g+1)(2j_g+1)} \hat{T}_q^{(1)}(j_g j_g) \\ &= \sqrt{2} \hbar \hat{T}_q^{(1)}(j_g j_g) \end{aligned} \quad (20)$$

光频移算符可以进一步表示为

$$\begin{aligned} \delta\hat{\varepsilon} &= \frac{E_0^2}{4} \frac{\|\hat{\mathbf{d}}\|^2}{\hbar} \text{Re} \left[\kappa_{eg}(\Delta\omega) \right] \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{6\hbar} \mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{J}} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{3} \sum_{q'} \hat{T}_{q'}^{(2)} \mathbf{e}^* \cdot Q_{q'}^{(2)*} \cdot \mathbf{e} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

当 $\mathbf{e} = \mathbf{e}_z$ 时，即，光场为偏振平行于z-轴的线偏振光时，可以计算得到

$$\mathbf{s} = \mathbf{ie} \times \mathbf{e}^* = 0, \quad \mathbf{e}^* \cdot Q_{q'}^{(2)*} \cdot \mathbf{e} = -\sqrt{6}/3\delta_{q'0}$$

因此，

$$\delta\hat{\varepsilon} \propto \left(\frac{1}{9} - \frac{\sqrt{6}}{9} \hat{T}_0^{(2)} \right) \quad (22)$$

可以看到，此时，光频移算符中不包含一阶项，即，不存在矢量光频移；式(23)右边第一项为标量光频移，会使得能级产生一个整体位移；第二项为张量频移，特点是磁子能级为 $\pm m_g$ 的能级

位移相等，注意到， $\hat{T}_0^{(2)}$ 的矩阵形式为

$$\hat{T}_0^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

当 $\mathbf{e} = \mathbf{e}_{+1} = -(\mathbf{e}_x + \mathbf{ie}_y)/\sqrt{2}$ 时，即，光场为左旋圆偏振光时， $\mathbf{s} = \mathbf{ie} \times \mathbf{e}^* = \mathbf{e}_z$ ， $\mathbf{e}^* \cdot Q_{q'}^{(2)*} \cdot \mathbf{e} = 1/\sqrt{6} \delta_{q'0}$ ，因此，

$$\delta\hat{\varepsilon} \propto \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{6\hbar} \hat{J}_z + \frac{\sqrt{6}}{18} \hat{T}_0^{(2)} \right) \quad (24)$$

此时，光频移算符中包含了一阶光频移项 \hat{J}_z ，即矢量频移，其特点是三个塞曼子能级之间具有等间距的能级分裂。需要注意的是，对自旋为1/2的系统，由于不可约张量 $\hat{T}_q^{(k)}(jj)$ 的阶数 $k \leq 2j = 1$ ，因此，在该系统中，无论采用什么偏振的光场，都不会产生张量光频移。

1.6 光吸收效应

光在泵浦原子的过程中，会不断被原子吸收。光场吸收速率和原子的极化程度有着密切关系。通过测量原子系综对光场的吸收来探测原子极化在磁场中的演化是原子磁力仪中常见的一种探测方式。本小节将对光吸收效应进行介绍。

由于每一个从基态跃迁到激发态的原子都会吸收一个光子，因此光子的吸收速率等于基态原子减少的速率。于是，根据式(13)，可得，光子的吸收速率为

$$-\text{Tr} \left[\frac{d}{dt} \hat{\rho} \right] = \text{Tr} \left[\delta\hat{I} \hat{\rho} \right] = \langle \delta\hat{I} \rangle \quad (25)$$

光子的吸收速率等于光吸算符的平均值 $\langle \delta\hat{I} \rangle$ 。根据式(12)，光吸收算符为

$$\begin{aligned} \delta\hat{I} &= -\frac{1}{i\hbar} (\delta\hat{H} - \delta\hat{H}^\dagger) \\ &= \frac{E_0^2}{4} \mathbf{e}^* \cdot \left\{ \frac{2}{\hbar} \sum_e \text{Im} \left[\kappa_{eg}(\Delta\omega) \right] \hat{\mathbf{d}} |e\rangle \langle e| \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e} \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

$\text{Im}[\kappa_{eg}(\Delta\omega)]$ 在 $\Delta\omega = 0$ 具有最大值，即，在共振条件下，原子系综对光场的吸收速率最大。类似于光频移算符，也可以用不可约张量算符展开 $\delta\hat{I}$ 。例如，对于⁴He原子的D₀跃迁，可得

$$\begin{aligned} \delta\hat{I} &= -\frac{E_0^2 \|\hat{\mathbf{d}}\|^2}{2\hbar} \text{Im} \left[\kappa_{eg}(\Delta\omega) \right] \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{6\hbar} \mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{J}} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{3} \sum_{q'} \hat{T}_{q'}^{(2)} \mathbf{e}^* \cdot Q_{q'}^{(2)*} \cdot \mathbf{e} \right) \end{aligned} \quad (27)$$

因此，

$$\langle \delta \hat{T} \rangle \propto \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{6\hbar} \mathbf{s} \cdot \langle \hat{\mathbf{J}} \rangle + \frac{1}{3} \sum_q \langle \hat{T}_q^{(2)} \rangle \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{Q}_q^{(2)*} \cdot \mathbf{e} \right) \quad (28)$$

光场的吸收不仅和一阶张量 $\langle \hat{\mathbf{J}} \rangle$ 有关, 也与二阶张量 $\langle \hat{T}_q^{(2)} \rangle$ 也有关。 $\langle \hat{\mathbf{J}} \rangle$ 和 $\langle \hat{T}_q^{(2)} \rangle$ 在磁场中具有不同的运动的方式, 实验上可以分别对这两个物理量进行测量, 从而实现原子极化在磁场中的演化的测量。

1.7 原子的极化

原子在吸收的光场过程中, 会被极化。根据不可约张量的阶数, 原子极化可以分为一阶、二阶、三阶等。根据不可约张量算符的完备性, 原子密度矩阵表示为

$$\hat{\rho} = \sum_{kq} \langle \hat{T}_q^{(k)} \rangle \hat{T}_q^{(k)\dagger} \quad (29)$$

原子密度矩阵可以按照原子极化的阶数展开。以亚稳态 ^4He 原子为例, 角动量量子数 $j_g = 1$, 因此, 不可约张量最高阶数为 2。另外, 由于 $\hat{J}_q = \sqrt{2} \hbar \hat{T}_q^{(1)}$, 密度矩阵可以进一步表示为

$$\hat{\rho} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2\hbar^2} \langle \hat{\mathbf{J}} \rangle \cdot \hat{\mathbf{J}} + \sum_q \langle \hat{T}_q^{(2)} \rangle (\hat{T}_q^{(2)})^\dagger \quad (30)$$

现在考虑光场的吸收对原子极化的影响。如果仅考虑光吸收项的影响, 则由式(13)可得

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{J}_q \rangle = -\frac{1}{2} \text{Tr} [(\delta \hat{T} \hat{\rho} + \hat{\rho} \delta \hat{T}) \hat{J}_q] \quad (31)$$

以左旋圆偏振光泵浦为例, 光吸收算符可以表示为

$$\delta \hat{T} = -\frac{E_0^2 \|\hat{\mathbf{d}}\|^2}{2\hbar} \text{Im} [\kappa_{eg}(\Delta\omega)] \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{6\hbar} \hat{J}_z + \frac{\sqrt{6}}{18} \hat{T}_0^{(2)} \right) \quad (32)$$

引入系数

$$\gamma_p = -\frac{E_0^2 \|\hat{\mathbf{d}}\|^2}{2\hbar} \text{Im} [\kappa_{eg}(\Delta\omega)] \quad (33)$$

则通过式(31)计算得到

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{J}_0 \rangle = -\gamma_p \left(-\frac{1}{9} \hbar + \frac{1}{6} \langle \hat{J}_0 \rangle - \frac{\sqrt{6}}{9} \hbar \langle \hat{T}_0^{(2)} \rangle \right) \quad (34)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{J}_{\pm 1} \rangle = -\gamma_p \left(\frac{1}{12} \langle \hat{J}_{\pm 1} \rangle - \frac{\sqrt{2}}{12} \hbar \langle \hat{T}_{\pm 1}^{(2)} \rangle \right) \quad (35)$$

可以看到, 圆偏振光会导致原子在 z 轴方向产生一阶极化, 并且同时也会给一阶极化带来弛豫影响。纵向分量 (平行于 z 轴方向或第 0 分量 $\langle \hat{J}_0 \rangle$) 的弛豫速率为 $1/T_0 = \gamma_p/6$; 横向分量 (垂直于 z 轴方向或非零分量 $\langle \hat{J}_{\pm 1} \rangle$) 弛豫速率为 $1/T_1 = \gamma_p/12$,

仅有纵向弛豫速率的一半。另外, 也可以看到, 有部分二阶极化在泵浦的过程中转化成一阶极化。

对于二阶原子极化, 仅考虑光吸收项的影响, 有

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{T}_0^{(2)} \rangle = -\gamma_p \left(\frac{1}{9} \langle \hat{T}_0^{(2)} \rangle + \frac{\sqrt{6}}{54} - \frac{\sqrt{6}}{36\hbar} \langle \hat{J}_0 \rangle \right) \quad (36)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{T}_{\pm 1}^{(2)} \rangle = -\gamma_p \left(\frac{1}{9} \langle \hat{T}_{\pm 1}^{(2)} \rangle - \frac{\sqrt{2}}{24\hbar} \langle \hat{J}_{\pm 1} \rangle \right) \quad (37)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{T}_{\pm 2}^{(2)} \rangle = -\frac{\gamma_p}{9} \langle \hat{T}_{\pm 2}^{(2)} \rangle \quad (38)$$

可以看到, 圆偏振光泵浦对二阶极化的各分量带来的弛豫速率相等, 并且会导致部分一阶极化向二阶极化转换。

2 原子与磁场的相互作用

原子磁力仪是通过探测原子极化在磁场中的运动特性来测量磁场的, 本节将讨论不同阶数的原子极化在磁场中的运动。假设原子受到一个外加磁场 \mathbf{B} 的作用, 则磁场和原子相互作用的哈密顿量为

$$\hat{H}_1 = -\mathbf{B} \cdot \hat{\boldsymbol{\mu}} \quad (39)$$

式中: $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ 为原子的磁矩。对于具有核自旋的粒子, $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ 包含三部分:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \hat{\boldsymbol{\mu}}_I + \hat{\boldsymbol{\mu}}_S + \hat{\boldsymbol{\mu}}_L = \frac{g_I \mu_N}{\hbar} \hat{\mathbf{I}} - \frac{g_S \mu_B}{\hbar} \hat{\mathbf{S}} - \frac{g_L \mu_B}{\hbar} \hat{\mathbf{L}} \quad (40)$$

式中: $\hat{\boldsymbol{\mu}}_I$ 为核磁矩, $\hat{\boldsymbol{\mu}}_S$ 为电子自旋磁矩, $\hat{\boldsymbol{\mu}}_L$ 为电子轨道磁矩, $g_L = 1$ 为电子轨道角动量 g -因子, $g_S \approx 2$ 为电子自旋 g -因子, g_I 为核自旋 g -因子 (对于不同的原子核具有不同的取值), μ_B 为波尔磁子, μ_N 为核磁子。

原子在磁场的作用下能级会发生分裂, 称为“塞曼分裂”。塞曼分裂可分为线性和非线性两种情况, 其中线性塞曼分裂是指能级分裂间距和磁场强度呈线性关系, 原子磁力仪利用这种线性关系, 通过测量磁共振频率, 可以实现对磁场强度的测量; 非线性塞曼分裂是指能级分裂和磁场强度不再具有线性关系, 在实际应用中会对磁场的测量带来干扰, 通常会尽量避免这种情况的发生。接下来以亚稳态 ^4He 原子为例来说明如何通过线性塞曼分裂实现对磁场的测量。

2.1 一阶原子极化在磁场中的运动方程

对于亚稳态⁴He原子，磁场和原子相互作用的哈密顿量为

$$\hat{H}_1 = -\mathbf{B} \cdot \hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{g_s \mu_B}{\hbar} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{S}} = -\gamma \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{S}} = -\gamma \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{J}} \quad (41)$$

式中： $\gamma = -g_s \mu_B / \hbar$ 称为“旋磁比”。由于亚稳态⁴He原子的轨道角动量为零，因此， $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{S}}$ 。原子在磁场中运动的方程为

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho} = [\hat{H}_1, \hat{\rho}] \quad (42)$$

利用角动量算符之间的对易关系式

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{J}_k \quad (43)$$

以及密度矩阵展开表达式(29)和不可约张量算符的正交关系，可得

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \langle \hat{\mathbf{J}} \rangle &= \text{Tr}([\hat{H}_1, \hat{\rho}] \hat{\mathbf{J}}) \\ &= -\text{Tr}\left(\gamma \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{J}}, \frac{1}{2\hbar^2} \langle \hat{\mathbf{J}} \rangle \cdot \hat{\mathbf{J}} \hat{\mathbf{J}}\right) \end{aligned} \quad (44)$$

由于

$$[\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{J}}, \langle \hat{\mathbf{J}} \rangle \cdot \hat{\mathbf{J}}] = i\hbar B_i \langle \hat{J}_j \rangle \varepsilon_{ijk} \hat{J}_k = i\hbar (\mathbf{B} \times \langle \hat{\mathbf{J}} \rangle) \cdot \hat{\mathbf{J}} \quad (45)$$

$$\text{Tr}(\hat{J}_i \hat{J}_j) = 2\hbar^2 \delta_{ij} \quad (46)$$

因此，

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{\mathbf{J}} \rangle = \gamma \langle \hat{\mathbf{J}} \rangle \times \mathbf{B} \quad (47)$$

这就是一阶原子极化在磁场中运动方程，也称为“Bloch方程”。在磁场的作用下， $\langle \hat{\mathbf{J}} \rangle$ 会绕磁场 \mathbf{B} 进动，称为“拉莫进动”；进动频率为 $\omega_L = \gamma |\mathbf{B}|$ ，称为“拉莫频率”。

2.2 磁共振

假设磁场 \mathbf{B} 沿量子轴方向，即， $\mathbf{B} = B_z \mathbf{e}_z$ ，在垂直于磁场方向施加一射频场 $\mathbf{B}_1 = B_1(\sin \omega t \mathbf{e}_x + \cos \omega t \mathbf{e}_y)$ ，则在 $\omega = \omega_L$ 会发生共振现象，即，磁共振。磁共振条件可以用于测量磁场的大小，即 $|\mathbf{B}| = \omega_L / \gamma$ 。以如下一个例子来进行说明：

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{\mathbf{J}} \rangle = -\gamma (\mathbf{B} + \mathbf{B}_1) \times \langle \hat{\mathbf{J}} \rangle - \Gamma_p (\langle \hat{\mathbf{J}} \rangle - P_0 \mathbf{e}_z) \quad (48)$$

其中，方程最后一项为泵浦项，表示由于泵浦作用不断产生沿 z 轴方向的一阶极化。为了求解方程，可以引入旋转坐标系，即

$$\begin{cases} \mathbf{f}_x = \cos \omega t \mathbf{e}_x - \sin \omega t \mathbf{e}_y \\ \mathbf{f}_y = \sin \omega t \mathbf{e}_x + \cos \omega t \mathbf{e}_y \\ \mathbf{f}_z = \mathbf{e}_z \end{cases} \quad (49)$$

因此，在旋转坐标系中， $\mathbf{B}_1 = B_1 \mathbf{f}_y$ ，并且旋转坐标系随时间的变化为

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_x \\ \mathbf{f}_y \\ \mathbf{f}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_x \\ \mathbf{f}_y \\ \mathbf{f}_z \end{pmatrix} \quad (50)$$

一阶原子极化在两个坐标系中可以表示为

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{J}} \rangle &= \langle \hat{J}'_x \rangle \mathbf{f}_x + \langle \hat{J}'_y \rangle \mathbf{f}_y + \langle \hat{J}'_z \rangle \mathbf{f}_z \\ &= \langle \hat{J}'_x \rangle \mathbf{e}_x + \langle \hat{J}'_y \rangle \mathbf{e}_y + \langle \hat{J}'_z \rangle \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (51)$$

坐标分量满足的变换关系为

$$\begin{pmatrix} \langle \hat{J}'_x \rangle \\ \langle \hat{J}'_y \rangle \\ \langle \hat{J}'_z \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \hat{J}_x \rangle \\ \langle \hat{J}_y \rangle \\ \langle \hat{J}_z \rangle \end{pmatrix} \quad (52)$$

方程式(48)写成矩阵形式为

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \langle \hat{J}'_x \rangle \\ \langle \hat{J}'_y \rangle \\ \langle \hat{J}'_z \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Gamma_p & \omega_L - \omega & -\Omega \\ \omega - \omega_L & -\Gamma_p & 0 \\ \Omega & 0 & -\Gamma_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \hat{J}'_x \rangle \\ \langle \hat{J}'_y \rangle \\ \langle \hat{J}'_z \rangle \end{pmatrix} + \Gamma_p \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P_0 \end{pmatrix} \quad (53)$$

式中： $\Omega = \gamma B_1$ 。方程式(53)的稳态($t \rightarrow \infty$)解为

$$\begin{cases} \langle \hat{J}'_x \rangle = \frac{-\Gamma_p \Omega}{\Gamma_p^2 + (\omega - \omega_L)^2 + \Omega^2} P_0 \\ \langle \hat{J}'_y \rangle = \frac{-(\omega - \omega_L) \Omega}{\Gamma_p^2 + (\omega - \omega_L)^2 + \Omega^2} P_0 \\ \langle \hat{J}'_z \rangle = \frac{\Gamma_p^2 + (\omega - \omega_L)^2}{\Gamma_p^2 + (\omega - \omega_L)^2 + \Omega^2} P_0 \end{cases} \quad (54)$$

在共振条件下，即， $\omega - \omega_L = 0$ ， $\langle \hat{J}'_z \rangle$ 和 $\langle \hat{J}'_x \rangle$ 取极值，而 $\langle \hat{J}'_y \rangle = 0$ 。在实验室坐标系下，各分量为

$$\begin{cases} \langle \hat{J}_x \rangle = \cos \omega t \langle \hat{J}'_x \rangle - \sin \omega t \langle \hat{J}'_y \rangle \\ \langle \hat{J}_y \rangle = \sin \omega t \langle \hat{J}'_x \rangle + \cos \omega t \langle \hat{J}'_y \rangle \\ \langle \hat{J}_z \rangle = \langle \hat{J}'_z \rangle \end{cases} \quad (55)$$

由于光场的吸收和原子的一阶极化 $\langle \hat{\mathbf{J}} \rangle$ 有式(29)所示关系，因此可以通过测量光吸收随外加射频场频率的变化曲线的极值点或中心对称点，来确定拉莫频率 $\omega = \omega_L$ 。另外注意到，对于横向分量 $\langle \hat{J}_x \rangle$ 和 $\langle \hat{J}_y \rangle$ ，由于其中包含了与外加射频场同频的振荡项，实验上可以通过混频的方式获得振幅随 ω 的变化曲线。

2.3 二阶原子极化的演化及共振

除了一阶原子极化，二阶原子极化在磁场中的运动特性也可用于测量磁场大小。根据式(42)，原子极化在磁场中演化的一般表达式为

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \langle \hat{T}_q^{(k)} \rangle &= \text{Tr}([\hat{H}_1, \hat{\rho}] \hat{T}_q^{(k)}) \\ &= -\text{Tr}([\gamma \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{J}}, \sum_q \langle \hat{T}_q^{(k)} \rangle (\hat{T}_q^{(k)})^\dagger] \hat{T}_q^{(k)}) \end{aligned} \quad (56)$$

利用角动量算符和不可约张量算符之间的对易关系可得二阶原子极化在磁场中的演化满足：

1) 磁场沿 z 轴方向，即 $\mathbf{B} = B_z \mathbf{e}_z$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{T}_q^{(2)} \rangle = -iq\gamma B_z \langle \hat{T}_q^{(2)} \rangle \quad (57)$$

2) 磁场沿 x 轴方向，即 $\mathbf{B} = B_x \mathbf{e}_x$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \hat{T}_q^{(2)} \rangle &= -\frac{i}{2} \gamma B_x \left(\sqrt{(3+q)(2-q)} \langle \hat{T}_{q+1}^{(2)} \rangle + \right. \\ &\quad \left. \sqrt{(3-q)(2+q)} \langle \hat{T}_{q-1}^{(2)} \rangle \right) \end{aligned} \quad (58)$$

3) 磁场沿 y 轴方向，即 $\mathbf{B} = B_y \mathbf{e}_y$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \hat{T}_q^{(2)} \rangle &= -\frac{1}{2} \gamma B_y \left(\sqrt{(3+q)(2-q)} \langle \hat{T}_{q+1}^{(2)} \rangle - \right. \\ &\quad \left. \sqrt{(3-q)(2+q)} \langle \hat{T}_{q-1}^{(2)} \rangle \right) \end{aligned} \quad (59)$$

类似于一阶原子极化，二阶原子极化也可以通过外加射频场来产生磁共振效应。假设磁场 \mathbf{B} 沿

$$A = \begin{pmatrix} 2i(\omega - \omega_L) & \Omega & 0 & 0 & 0 \\ -\Omega & i(\omega - \omega_L) & \frac{\sqrt{6}\Omega}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}\Omega}{2} & 0 & \frac{\sqrt{6}\Omega}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{6}\Omega}{2} & -i(\omega - \omega_L) & \Omega \\ 0 & 0 & 0 & -\Omega & -2i(\omega - \omega_L) \end{pmatrix} \quad (65)$$

注意到， A 不含时，因此，当在式(65)中加入泵浦项后，类似于一阶原子极化，可以求解二阶原子极化 Q 的稳态解。光场的吸收和原子的二阶极化 $\langle \hat{T}_q^{(2)} \rangle$ 关系如式(29)，与一阶原子极化类似，利用二阶原子极化随射频场频率变化曲线的极值点或中心对称点就可以确定共振条件^[19]。需要注意的是，二阶原子极化的横向分量 $\langle \hat{T}_q^{(2)} \rangle$ ， $q \neq 0$ ，不仅包含与射频场同频的振荡项，还包含二倍频振荡项。

量子轴方向，即， $\mathbf{B} = B_z \mathbf{e}_z$ ，在垂直于磁场方向施加一射频场 $\mathbf{B}_1 = B_1(\sin \omega t \mathbf{e}_x + \cos \omega t \mathbf{e}_y)$ ，则二阶原子极化的演化方程为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \hat{T}_q^{(2)} \rangle &= -iq\omega_L \langle \hat{T}_q^{(2)} \rangle - \\ &\frac{\Omega}{2} \left(e^{i\omega t} \sqrt{(3+q)(2-q)} \langle \hat{T}_{q+1}^{(2)} \rangle - \right. \\ &\quad \left. e^{-i\omega t} \sqrt{(3-q)(2+q)} \langle \hat{T}_{q-1}^{(2)} \rangle \right) \end{aligned} \quad (60)$$

同样地，可以在旋转坐标系中进行讨论。定义

$$Q_q = \langle \hat{T}_q^{(2)} \rangle e^{iq\omega t} \quad (61)$$

则式(60)可以表示为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Q_q &= iq(\omega - \omega_L) Q_q - \\ &\frac{\Omega}{2} \left(\sqrt{(3+q)(2-q)} Q_{q+1} - \right. \\ &\quad \left. \sqrt{(3-q)(2+q)} Q_{q-1} \right) \end{aligned} \quad (62)$$

记

$$Q = [Q_{+2} \quad Q_{+1} \quad Q_0 \quad Q_{-1} \quad Q_{-2}]^T \quad (63)$$

则式(62)写成矩阵形式为

$$\frac{d}{dt} Q = A Q \quad (64)$$

其中，

3 结论

利用光场与原子的相互作用，一方面可以极化原子，另一方面也可以探测原子极化的状态。实际的探测光场通常是弱光场，这是为了尽量减小对原有的原子极化状态的破坏，同时也可以避免光频移所带来的负面效应。原子的一阶、二阶极化均与光场的吸收有关，因此，它们在磁场中的运动特性都可以用于测量磁场，磁共振是最常见磁场测量的辅助手段之一，通过磁共振条件可

以锁定共振频率, 利用共振频率和待测磁场的线性关系, 从而可以计算得到磁场强度。作者对原子磁力仪中一些量子物理基础进行了梳理和阐述, 对于初次接触并有志于从事该领域的科学工作者能够起到引路的作用。

参考文献

- [1] BUDKER D, ROMALIS M, Optical magnetometry [J]. *Nature Physics*, 2007, 3:227-234.
- [2] HAPPER W, Optical pumping [J]. *Review of Modern Physics*, 1972, 44(2):169-249.
- [3] APPELT S, BARANGA A, ERICKSON C J, et al. Theory of spin-exchange optical pumping of ^3He and ^{129}Xe [J]. *Physics Review A*, 1998, 58(2): 1412-1439.
- [4] BUDKER D, JACKSON KIMBALL D F. Optical magnetometry [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
- [5] BELL W E, BLOOM A L. Optically driven spin precession[J]. *Physics Review Letter*, 1961, 6: 280-281.
- [6] GRUJIĆ Z D, WEIS A. Atomic magnetic resonance induced by amplitude-, frequency-, or polarization-modulated light [J]. *Physics Review A*, 2013, 88 (1) : 1877-1833.
- [7] BUDKER D, YASHCHUK V, ZOLOTOREVET M, et al. Nonlinear magneto-optic effects with ultranarrow widths [J]. *Physics Review Letters*, 1998, 81(26):5788-5791.
- [8] PURCELL E M, FIELD G B. Influence of collisions upon population of hyperfine states in hydrogen [J]. *Astrophysics Journal*, 1956, 124: 542 - 549.
- [9] ALLRED J, LYMAN R, KORNACK T W, et al. A high-sensitivity atomic magnetometer unaffected by spin-exchange relaxation [J]. *Physics Review Letter* 2022, 89 (13):801.
- [10] LEE S K, SAUER K L, SELTZERET S J, et al. Subfemtotesla radio-frequency atomic magnetometer for detection of nuclear quadrupole resonance[J]. *Applied Physics Letter*, 2006, 89(21):214106.
- [11] KOMINIS I K, KORNACK T W, ALLRED J C, et al. A subfemtotesla multichannel atomic magnetometer [J]. *Nature*, 2003, 422(6932): 596-599.
- [12] XIA H, BARANGA B A, HOFFMAN D, et al. Magnetoencephalography with an atomic magnetometer [J]. *Applied Physics Letters*, 2006, 89(21): 664.
- [13] JOHNSON, KORT, SCHWINDT, et al. Magnetoencephalography with a two-color pump-probe, fiber-coupled atomic magnetometer [J]. *Applied Physics Letter*, 2010, 97(24):243703-1-243703-3.
- [14] HAPPER W, MATHUR B S, Effective operator formalism in optical pumping [J]. *Physical Review*, 1967, 163(1): 12-25.
- [15] PATTON B, ZHIVUN E, HOVDE D C, et al. All-optical vector atomic magnetometer [J]. *Physics Review Letter*, 2014, 113(1):13001.
- [16] ZHIVUN E, WICKENBROCK A, PATTON B, et al. Alkali-vapor magnetic resonance driven by fictitious radio-frequency fields [J]. *Applied Physics Letter* 2014, 105(19): 192406.
- [17] JENSEN K, ACOSTA V M, HIGBIE J M, et al. Cancellation of nonlinear Zeeman shifts with light shifts [J]. *Physics Review A*, 2009, 79(2): 23406-1-23406-5.
- [18] CHALUPCZAK W, WOJCIECHOWSKI A, PUSTELNY S, et al. Competition between the tensor light shift and nonlinear Zeeman effect [J]. *Physics Review A*, 2010, 82:23417.
- [19] WEIS A, BISON G, PAZGALEV A. Theory of double resonance magnetometers based on atomic alignment [J]. *Physics Review A*, 2006, 74(3):3401-1-3401-8.

(本文编辑:田艳玲)

第一作者: 李胜, 男, 助理研究员, 博士, 主要研究方向为量子精密测量。

作者简介: 周超, 男, 助理研究员, 博士, 主要研究方向为量子时频传递。