

doi: 10.11823/j.issn.1674-5795.2022.06.05

FFT幅相联合的快速高精度频率估计方法

马罗文¹, 刘宁^{2*}, 胡心语³, 倪丽花³

(1. 中国人民解放军95865部队, 北京102200; 2. 中国人民解放军32802部队, 北京100082;

3. 电子科技大学, 四川成都611731)

摘要: 快速傅里叶变换 (Fast Fourier Transform, FFT) 常用于信号频率估计, 采用填零的方法可降低幅度谱频率搜索间隔的量化误差, 但是会使频率估计的计算量成倍增加。本文提出了一种FFT幅相联合的快速高精度频率估计算法, 首先利用信号采样的频谱序列和尾首样本差确定幅度谱及峰值位置, 然后由频谱序列在幅度谱峰值位置和信号采样的尾首样本差来确定频率搜索间隔的量化误差校正。因此, 所提方法同时利用了幅度谱峰值的位置信息与相位信息。分析结果表明, 与仅基于幅度谱搜索的FFT算法相比, 所提方法的计算复杂度更低, 且定位精度更高。

关键词: 快速傅里叶变换; 频率估计; 量化误差校正; 快速频率估计

中图分类号: TB9

文献标识码: A

文章编号: 1674-5795(2022)06-0034-06

Fast and high-precision frequency estimation via the combination of FFT amplitude and phase information

MA Luowen¹, LIU Ning^{2*}, HU Xinyu³, NI Lihua³

(1. PLA Unit No. 95865, Beijing 102200, China; 2. PLA Unit No. 32802, Beijing 100082, China;

3. University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China)

Abstract: The fast Fourier transform (FFT) is commonly used for signal frequency estimation, and the zero-filling method can reduce the quantization error of the amplitude spectrum frequency search interval, but it will increase the computational effort of frequency estimation exponentially. In this paper, a fast and high-precision frequency estimation algorithm based on FFT amplitude-phase combination is proposed. First, the amplitude spectrum and its peak position are determined by using the spectrum sequence of signal sampling and the difference between tail and head samples. Then, the quantization error correction value of the frequency search interval is determined by the spectrum sequence peak position in the amplitude spectrum and the tail sample difference of signal sampling. Therefore, the proposed method utilizes both the position information and the phase information of the peak value of the amplitude spectrum. Simulation results show that the proposed algorithm has lower computational complexity and higher positioning accuracy compared with the FFT algorithm based on amplitude spectrum search only.

Key words: fast Fourier transformation (FFT); frequency estimation; quantization error correction; fast frequency estimation

0 引言

在雷达^[1-3]、通信^[4-5]、声呐^[6]等领域对信号频率进行快速、准确的测量具有重要意义。目前,

常用的频率估计算法按照工作原理可以分为: 计数法、相位法、快速傅里叶变换算法、子空间分解类算法等。其中, 单频信号^[7]的估计问题一般采用计数法和相位法; 而多频信号估计问题一般

收稿日期: 2022-10-27; 修回日期: 2022-11-03

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(61771108)

引用格式: 马罗文, 刘宁, 胡心语, 等. FFT幅相联合的快速高精度频率估计方法[J]. 计测技术, 2022, 42(6): 34-39.

Citation: MA L W, LIU N, HU X Y, et al. Fast and high-precision frequency estimation via the combination of FFT amplitude and phase information[J]. Metrology and measurement technology, 2022, 42(6): 34-39.



采用的方法为子空间分解类算法和快速傅里叶变换算法。子空间分解类算法^[8-9]中典型代表为多重信号分类 (Multiple Signal Classification, MUSIC) 算法^[10]和旋转不变技术估计信号参数 (Estimating Signal Parameter Via Rotational Invariance Techniques, ESPRIT) 算法^[11], 此类子空间分解算法具有较高的估计精度, 但由于需要搜索幅度谱峰值位置或特征值分解导致计算量相对较大。快速傅里叶变换算法^[12]只能对有限点序列进行处理, 会造成能量泄露, 同时存在栅栏效应, 当信号频谱峰值谱线不能与主瓣的中心重合时, 信号真实频率落于主瓣内的两根谱线之间, 便会产生较大的频率测量误差^[13-16]。

由于快速傅里叶变换的幅度谱频率搜索间隔与信号采样数或快速傅里叶变换的长度成反比, 为了降低快速傅里叶变换法幅度谱频率搜索间隔的量化误差对频率测量精度的影响, 常采用填零的方法增加信号采样数或快速傅里叶变换的长度。但是, 快速傅里叶变换的计算量与信号采样数或快速傅里叶变换长度成正比, 这种提高测频精度的方法也会使频率测量的计算量成倍地增加, 导致其难以应用于实时性要求较高的场景。

高精度和实时性要求的矛盾一直都是频率估计在高速全数字解调器中应用的瓶颈。因此, 研究一种既保证高精度, 又满足低计算量的频率估计算法, 具有重要的应用前景^[17]。本文提出同时利用信号采样的快速傅里叶变换的幅度谱峰值位置和频率搜索间隔量化误差校正值确定信号频率的方法, 能实现高精度快速测频的目的。

1 信号模型

暂不考虑噪声时, 单频复谐波信号表示为

$$x(t) = Ae^{j(2\pi \cdot f_0 \cdot t + \theta_0)} \quad (1)$$

式中: A 为复正信号的幅度; f_0 为频率, Hz; θ_0 为初相, rad。在不做特殊说明的情况下, 本文基于该信号展开算法理论推导与实验分析。

经过 N 点采样后的离散信号表示为

$$x(n) = Ae^{j(2\pi \cdot f_0 \cdot n + \theta_0)} \quad (n = 0, 1, \dots, N-1) \quad (2)$$

对 $x(n)$ 进行 N 点快速傅里叶变换, 得到

$$X[k] = Ae^{j\theta_0} e^{j\pi(N-1)\left(f_0 - \frac{k}{N}\right)} \frac{\sin\left(\pi N\left(f_0 - \frac{k}{N}\right)\right)}{\sin\left(\pi\left(f_0 - \frac{k}{N}\right)\right)} \quad (3)$$

幅度最大值处的离散频率索引值为 m , 根据 $X[k]$ 幅度最大值处的位置 m 可以得到信号频率的估计值为 $\hat{f} = \frac{m}{N}$ 。由于栅栏效应的存在, 当信号频谱峰值谱线不能与主瓣的中心重合时, 信号真实频率落于主瓣内的两根谱线之间, 便会产生较大的频率测量误差。

因此, 本文利用信号相位信息, 消除了传统方法仅使用幅度信息受到的搜索间隔的限制, 提出了 FFT 幅相联合的快速高精度频率估计方法。

2 FFT 幅相联合的高精度频率估计方法

首先对前 $N-1$ 个信号采样 $x(n)$, $n=0, 1, 2, \dots, N-2$, 采用快速傅里叶变换, 得到频谱序列 $y_1(k)$, 为

$$y_1(k) = \sum_{n=0}^{N-2} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N-1}nk} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N-2) \quad (4)$$

然后经过一位滑窗平移得到后 $N-1$ 个信号采样 $x(n)$, $n = 1, 2, \dots, N-1$, 并对其采用快速傅里叶变换, 得到频谱序列 $y_2(k)$, 为

$$y_2(k) = \sum_{n=0}^{N-2} x(n+1) e^{-j\frac{2\pi}{N-1}nk} \quad (5)$$

由于频谱序列 $y_1(k)$ 和 $y_2(k)$ 是对具有相同频率的采样信号进行 FFT 运算得到的, 那么 $y_1(k)$ 和 $y_2(k)$ 幅度谱的峰值位置相同。根据频谱序列 $y_1(k)$ 和 $y_2(k)$, 得到幅度谱 $z(k)$ 为

$$z(k) = |y_1(k)| + |y_2(k)| \quad (6)$$

根据式 (6), 信号频率估计值所对应的序列号, 即幅度谱的谱峰位置 m 为

$$m = \arg \max_{k=0,1,2,\dots,N-2} z(k) \quad (7)$$

根据式 (7) 得到信号频率的估计值为 $f = \frac{m}{N}$, 即传统的 FFT 算法。可见, 采用 FFT 算法, 当信号幅度谱的峰值不能与主瓣的中心重合时, 信号真实频率落于主瓣内的两根幅度谱线之间, 便会产生较大的频率测量误差。为此, 下面提出了 FFT 幅相联合的高精度频率估计方法。

根据式 (3), 式 (4) 和式 (5) 在幅度谱的谱峰位置 m 处的比值为

$$\frac{y_2(m)}{y_1(m)} = e^{j \cdot 2\pi \cdot f_0} \quad (8)$$

FFT 幅相联合的高精度频率估计 f_0 为

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \text{angle} \left(\frac{y_2(m)}{y_1(m)} \right) \quad (9)$$

式中: angle 表示复数的相位角。

由式(9)可知, 利用了频谱序列 $y_1(m)$ 和 $y_2(m)$ 的相位差对频率进行估计, 频率的估计结果不再受限于频率搜索间隔的量化误差, 从而实现高精度频率估计。

3 FFT幅相联合的快速高精度频率估计方法

根据式(4)和式(5)可知, 为了求解 $y_1(k)$ 与 $y_2(k)$, 需要进行两次 $N-1$ 点 FFT 变换, 对此, 提出 FFT 幅相联合的快速高精度频率估计方法, 利用迭代, 仅需要一次 FFT 变换求解 $y_1(k)$, 然后通过对 $y_1(k)$ 进行简单的加法和乘法迭代运算就可以得到 $y_2(k)$, 避免了 FFT 变换重复计算的问题可实现快速高精度频率估计。

由式(4)和式(5)得

$$y_2(k) = [y_1(k) + v] e^{j \frac{2\pi}{N-1} k} \quad (10)$$

式中: v 为信号采样的尾首样本差。

$$v = x(N-1) - x(0) \quad (11)$$

根据频谱序列 $y_1(k)$ 和信号采样的尾首样本差 v , 即可快速得到幅度谱 $z(k)$ 为

$$z(k) = |y_1(k) + v| + |y_1(k)| \quad (12)$$

由式(7)知信号频率估计值所对应的序列号 m 。

进一步利用频谱序列 $y_1(k)$ 和 $y_1(k) + v$ 在幅度谱峰位置 m 处的相位差, 消除 FFT 算法受限于量化间隔的影响。根据式(8)和式(10), 在幅度谱的谱峰位置 m 处, 可以得到

$$\frac{y_1(m) + v}{y_1(m)} = e^{j \cdot 2\pi \left(f_0 - \frac{m}{N-1} \right)} \quad (13)$$

频率搜索间隔的量化误差校正 u 为

$$u = \frac{1}{2\pi} \text{angle} \left(\frac{y_1(m) + v}{y_1(m)} \right) = f_0 - \frac{m}{N-1} \quad (14)$$

得到 FFT 幅相联合的快速高精度频率估计 f_0 为

$$f_0 = \frac{m}{N-1} + u \quad (15)$$

上述算法流程图如图1所示。

综上, FFT 幅相联合的快速高精度频率估计算法, 一方面通过使用滑窗迭代算法, 只需要进行一次 FFT 变换就可以得到频谱序列 $y_1(k)$ 和 $y_2(k)$, 减少了冗余计算; 另一方面, 利用幅度谱峰 $y_1(m)$

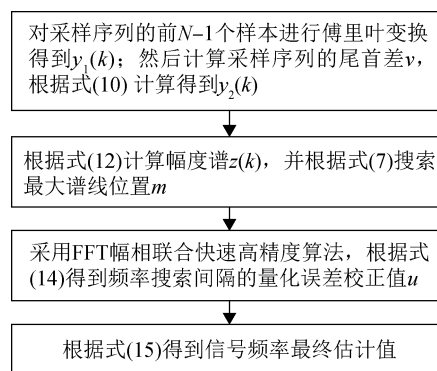


图1 FFT幅相联合快速高精度算法流程图

Fig.1 Flow chart of fast high precision algorithm based on FFT amplitude and phase combination

和 $y_1(m) + v$ 的相位差对频率搜索间隔量化误差进行校正, 达到了高精度快速测频的目的。

4 计算复杂度分析

为了求解 $y_1(k)$ 与 $y_2(k)$, 需要进行 2 次 $N-1$ 点 FFT 变换, 计算复杂度为

$$O(2(N-1)\log(N-1)) \quad (16)$$

由式(10)可知, 通过一次 FFT 变换求解 $y_1(k)$, 然后对 $y_1(k)$ 进行简单的加法和乘法迭代运算就可以得到 $y_2(k)$, 从而避免了 FFT 变换重复计算的问题, 因此, 与传统 FFT 算法相比, 本文所提的 FFT 幅相联合的快速高精度频率估计算法的计算复杂度节省了 $O((N-1)\log(N-1)-2)$, 从而实现快速高精度频率估计。

5 仿真结果与分析

为了验证 FFT 幅相联合的快速高精度频率估计算法的性能, 进行多次蒙特卡洛仿真实验, 并与经典的 FFT 算法进行比较。测量信号频率时, FFT 算法只利用幅度谱的谱峰位置测量信号频率, FFT 幅相联合的快速高精度频率估计算法不仅利用了幅度谱的谱峰位置, 还利用了频率搜索间隔的量化误差校正。

仿真过程中, 信号采样数分四种情况, 即 $N=32, 64, 128, 256$, 信号采样中包括归一化频率 (相对于采样频率) 等于 0.2140, 信噪比为 18 dB 的信号, 以及归一化频率等于 0.1070、干信比为 11 dB 的干扰。

当 $N=32, 64, 128, 256$ 时, 频谱序列 $y_1(k)$ 和

$y_2(k)$ 的幅度谱及其相位如图 2 至图 5 所示。可见, 频谱序列 $y_1(k)$ 和 $y_2(k)$ 的幅度谱 y_1, y_2 的谱峰位置相同, 验证了通过式 (6) 估计谱峰位置是合理的; 且随着采样点数增加, 这一个特征越明显。

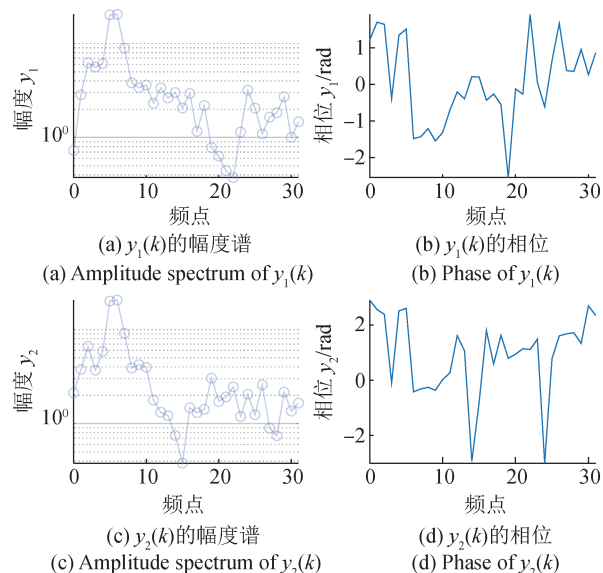


图 2 $N=32$ 时, $y_1(k)$ 和 $y_2(k)$ 的幅度谱及相位

Fig.2 Amplitude spectrums and phases of $y_1(k)$ and $y_2(k)$ for $N=32$

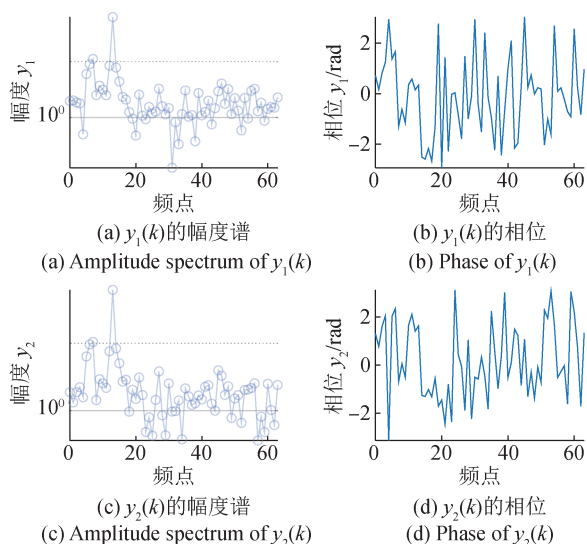


图 3 $N=64$ 时, $y_1(k)$ 和 $y_2(k)$ 的幅度谱及相位

Fig.3 Amplitude spectrums and phases of $y_1(k)$ and $y_2(k)$ for $N=64$

当 $N=32, 64, 128, 256$ 时, FFT 算法与 FFT 幅相联合的快速高精度频率估计算法的信号归一化测频均方根误差的累计概率分布函数 (CDF) 如图 6 所示。可见, FFT 幅相联合的快速高精度频率

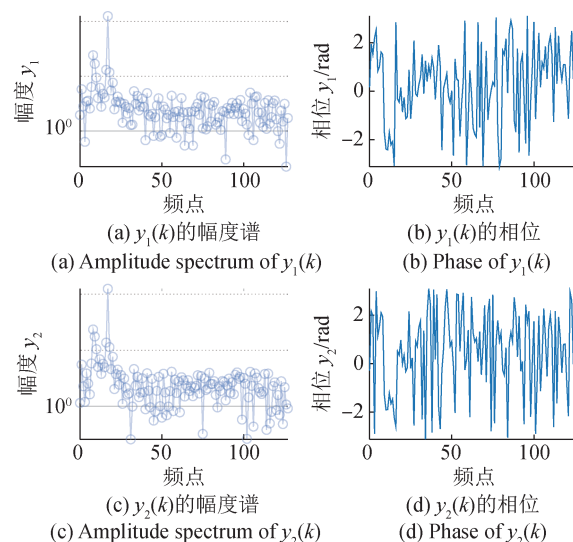


图 4 $N=128$ 时, $y_1(k)$ 和 $y_2(k)$ 的幅度谱及相位

Fig.4 Amplitude spectrums and phases of $y_1(k)$ and $y_2(k)$ for $N=128$

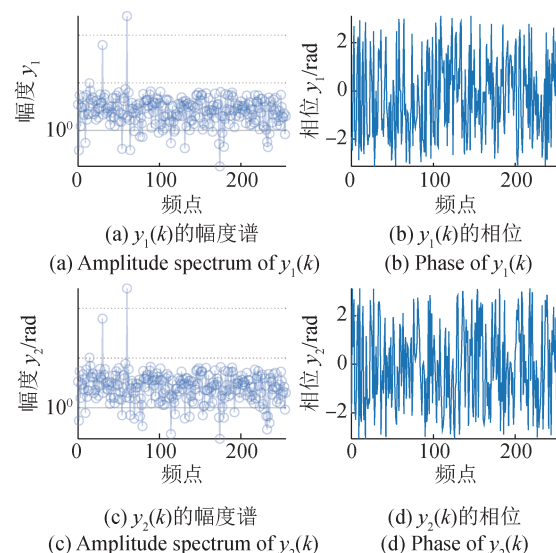
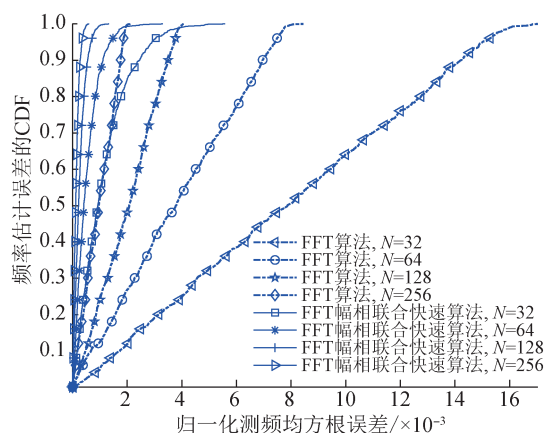


图 5 $N=256$ 时, $y_1(k)$ 和 $y_2(k)$ 的幅度谱及相位

Fig.5 Amplitude spectrums and phases of $y_1(k)$ and $y_2(k)$ for $N=256$

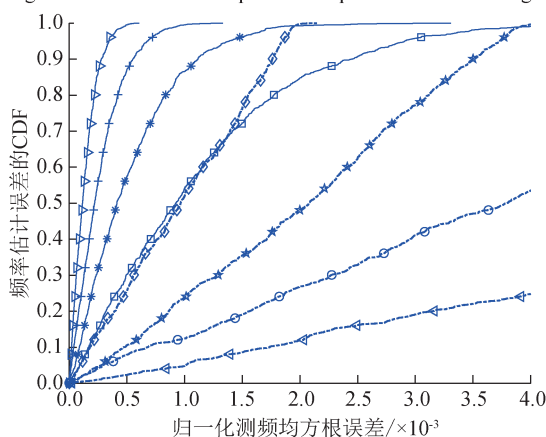
估计算法在信号采样数 $N=32$ 时的 CDF 接近 FFT 算法在信号采样数 $N=256$ 时的 CDF, 达到了高精度测频的目的。

由仿真结果可见, 不同采样数下, FFT 算法的信号归一化测频均方根误差分别为 0.0091, 0.0044, 0.0023 和 0.0011; FFT 幅相联合的快速高精度频率估计算法的信号归一化测频均方根误差分别为 0.0014, 0.0007, 0.0003 和 0.0002。可以得出, 与 FFT 算法相比, 利用同样的采样信号,



(a) FFT算法与FFT幅相联合快速算法的归一化测频误差的CDF

(a) CDFs of normalized frequency measurement error of FFT algorithm and fast FFT amplitude and phase combination algorithm



(b) FFT算法与FFT幅相联合快速算法的归一化测频误差的CDF局部图

(b) CDF local graphs of normalized frequency measurement error of FFT algorithm and fast FFT amplitude and phase combination algorithm

图6 不同采样数,FFT算法与FFT幅相联合快速算法的归一化测频误差的CDF及局部图

Fig.6 CDFs of normalized frequency measurement error of FFT algorithm and fast FFT amplitude and phase combination algorithm with different sampling numbers

当 $N=32, 64, 128, 256$ 时,FFT幅相联合的快速高精度频率估计算法的归一化均方根误差分别降低了84.15%, 84.57%, 85.24%和84.73%,FFT幅相联合的快速高精度频率估计算法在信号采样数 $N=32$ 时的测频精度接近FFT算法在信号采样数 $N=256$ 时的测频精度,达到了高精度测频的目的。

6 结论

本文提出了一种FFT幅相联合的快速高精度频率估计算法,一方面,只需要进行一次FFT变换就可以得到两个频谱序列,从而减少了冗余计算;

另一方面,利用两个频谱序列的相位差对频率搜索间隔量化误差进行校正,达到了高精度快速测频的目的。实验结果和分析表明,由于同时利用了幅度谱的谱峰位置与频率搜索间隔的量化误差校正,该算法在信号采样数 $N=32$ 时的测频精度接近FFT算法在信号采样数 $N=256$ 时的测频精度,适用于需要快速、高精度测频的应用场合。未来的研究还可以利用更多的频谱序列,进一步提高频率估计的精度。

参考文献

- [1] 楼红英, 杨忠, 沈保龙. 雷达射频测试系统现场整体计量校准技术研究[J]. 计测技术, 2017, 37(4): 45 - 48, 56.
- LOU H Y, YANG Z, SHEN B L. Research on field overall measurement calibration technology of radar RF test system [J]. Metrology and measurement technology, 2017, 37(4): 45 - 48, 56. (in Chinese)
- [2] 钟仁海, 刘冲, 钟催林, 等. 一种24 GHz雷达中频信号频率的测量方法研究[J]. 电子信息, 2018 (12): 61 - 62.
- ZHONG R H, LIU C, ZHONG C L, et al. Research on a method of measuring IF signal frequency of 24 GHz radar [J]. Electronic information, 2018 (12): 61 - 62. (in Chinese)
- [3] 丁一鹏, 柳润金, 许雪梅. 基于连续波雷达的人体目标微多普勒频率估计方法[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2022, 53(4): 1273 - 1280.
- DING Y P, LIU R J, XU X M. Human micro-doppler frequency estimation method based on continuous wave radar [J]. Journal of Central South University (Natural science edition): 1273 - 1280. (in Chinese)
- [4] 梁志国, 张大治, 孙璟宇, 等. 四参数正弦波曲线拟合的快速算法[J]. 计测技术, 2006(1): 4 - 7, 47.
- LIANG Z G, ZHANG D Z, SUN J Y, et al. Fast algorithm of four parameter sine wave curve fitting[J]. Metrology and measurement technology, 2006(1): 4-7, 47. (in Chinese)
- [5] 武晓明. 基于AD9850的通信信号频率测量[J]. 山东交通学院学报, 2007(3): 80 - 83.
- WU X M. Frequency measurement of communication signal based on AD9850 [J]. Journal of Shandong Jiaotong University, 2007(3): 80 - 83. (in Chinese)
- [6] 丁学科, 周志平, 胡泽鹏, 等. 一种多信号时差估计的子空间方法[J]. 兵器装备工程学报, 2016, 37

- (9): 96-99.
- DING X K, ZHOU Z P, HU Z P, et al. A subspace method for time difference estimation of multiple signals [J]. Journal of ordnance equipment engineering, 2016, 37(9): 96-99. (in Chinese)
- [7] 陈毅滨. 一种低信噪比下正弦波频率估计方法[J]. 通信技术, 2021, 54 (10): 2316-2320.
- CHEN Y B. A sinusoid wave frequency estimation method under low SNR[J]. Communication technology, 2021, 54 (10): 2316-2320. (in Chinese)
- [8] 多滨, 罗俊松, 贾勇, 等. 基于子空间分解类算法的高精度频率估计[J]. 电子科技大学学报, 2020, 49 (1): 42-48.
- DUO B, LUO J S, JIA Y, et al. High precision frequency estimation based on subspace decomposition algorithm [J]. Journal of University of Electronic Science and Technology, 2020, 49(1): 42-48. (in Chinese)
- [9] 何子述. 现代数字信号处理及其应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2009.
- HE Z S. Modern digital signal processing and its applications[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2009. (in Chinese)
- [10] KINTZ A L, GUPTA I J. A modified MUSIC algorithm for direction of arrival estimation in the presence of antenna array manifold mis-match[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2016, 64(11): 4836-4847.
- [11] FAYAD Y, WANG C, HAFEZ E, et al. Direction of arrival estimation using novel ESPRIT method for localization and tracking radar systems[C]// International Bhurban Conference on Applied Sciences & Technology. IEEE, 2014.
- [12] 柏果, 程郁凡, 唐万斌. 基于两阶段加窗插值的多音信号频率估计算法[J]. 电子科技大学学报, 2021, 50 (5): 682-688.
- BO G, CHENG Y F, TANG W B. Frequency estimation of multi-tone by two-stage windowed interpolation [J]. Journal of University of Electronic Science and technology, 2021, 50(5): 682-688. (in Chinese)
- [13] 柏林, 董鹏飞, 刘小峰, 等. 比值法的频率估计精度分析[J]. 重庆大学学报, 2011, 3(10): 7-13.
- BO L, DONG P F, LIU X F, et al. Accuracy analysis for frequency estimation of amplitude ratio method[J]. Journal of Chongqing University, 2011, 3(10): 7-13. (in Chinese)
- [14] 邓振森, 刘渝, 王志忠. 正弦波频率估计的修正 Rife 算法[J]. 数据采集与处理, 2006, 21(4): 473-477.
- DENG Z M, LIU Y, WANG Z Z. Modified rife algorithm for frequency estimation of sinusoid wave [J]. Journal of data acquisition & processing, 2006, 21(4): 473-477. (in Chinese)
- [15] RIFE D C, VINCENT G A. Use of the discrete fourier transform in the measurement of frequencies and levels of tones[J]. Bell labs technical journal, 1970, 49(2): 197-228.
- [16] QUINN B G. Estimating frequency by interpolation using Fourier coefficients[J]. IEEE transactions on signal processing, 1994, 42(5): 1264-1268.
- [17] 陈镜, 倪丽花, 万群, 等. 一种校正频率搜索间隔量化误差的高精度测频方法: CN202110458637.5[P]. 2021-08-06.
- CHEN J, NI L H, WAN Q, et al. A high precision frequency measurement method for correcting quantization error of frequency search interval: CN 202110458637.5 [P]. 2021-08-06. (in Chinese)

(本文编辑:朱俊真)



第一作者: 马罗文 (1992—), 男, 助理工程师, 硕士, 主要研究方向为短波 OFDM 通信技术。



通讯作者: 刘宁 (1965—), 女, 正高级工程师, 硕士, 主要研究方向为雷达、通信反干扰。