

doi: 10.11823/j.issn.1674-5795.2021.05.05

直齿圆柱齿轮三种齿厚参数的微量关系及应用

锁刘佳, 王立鼎

(大连理工大学 机械工程学院, 辽宁 大连 116024)

摘要: 固定弦齿厚、公法线长度与跨棒距是描述齿轮齿厚的三种参数, 本文就这三种齿厚参数的特点及适用范围进行了讨论, 通过分析三种参数的微量关系, 推导出它们之间相互转换的计算列式, 得出了三个常见压力角条件下三种齿厚参数的微量关系图, 并给出了微量关系图的具体应用示例。基于三种齿厚参数微量转换关系列式及微量关系图, 可在已知一种齿厚参数微量的条件下, 高效地得到另外两种齿厚参数的微量值, 为工程应用提供了便利。

关键词: 齿厚; 固定弦齿厚; 公法线长度

中图分类号: TB921

文献标识码: A

文章编号: 1674-5795(2021)05-0052-06

Increment Relationship and its Application of Three Tooth Thickness Parameters of Cylindrical Gear

SUO Liujia, WANG Liding

(School of Mechanical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: Constant chord height, base tangent length and the span of rod are the parameters that describe the tooth thickness of the gear. This article discusses the characteristics and application scope of three tooth thickness parameters and analyzes the increment relationship of these parameters. The calculation formula for the conversion among the three parameters' increment was derived, the relationship of three tooth thickness parameters under three common pressure angles were obtained, and application examples were given. Based on the conversion relationship of the three tooth thickness parameters, the increments of the other two tooth thickness parameters can be easily obtained when one of the tooth thickness parameters is given, which will effectively facilitate engineering applications.

Key words: tooth thickness; constant chord height; base tangent length

0 引言

齿轮传动中齿侧间隙的控制, 依赖于齿轮零件图上给定合理的齿轮齿厚上下偏差^[1-4]。而在齿轮元件设计、齿轮加工与齿轮测量中, 经常会遇到齿轮的固定弦齿厚、公法线长度与 M 值(跨棒距的测量值)之间的尺寸及其公差换算问题。在一些齿轮手册和资料中, 通常会介绍齿轮某两个齿厚测量参数之间增量(与齿厚公差相关)关系的计算式^[5-7], 但是对三者微量关系的阐述不够集中、完整, 有时在同一齿轮公差标准中会出现固定弦齿厚公差、公法线长度公差与跨棒距测量值三种齿厚参数不协调的问题。

针对上述问题, 本文阐述了标准直齿圆柱齿轮中固定弦齿厚、公法线长度与跨棒距三种齿厚参数的增量关系, 推导出了三者互相变换的简便计算公式, 给出了三个常见压力角条件下三种齿厚参数的微量关系图, 并对微量关系图的具体应用进行举例, 有效提升三种齿厚参数的计算便利性。

1 三种测量齿厚方法

1.1 固定弦齿厚的测量

当标准齿条的齿形和直齿圆柱齿轮的齿形在对称位置上接触时(如图 1 所示), 两接触点之间的距离为固定弦齿厚 S_x , 而此弦到齿轮齿顶的距离为固定弦齿

收稿日期: 2021-01-13; 修回日期: 2021-04-25

基金项目: 国家自然科学基金面上基金(52075067)

引用格式: 锁刘佳, 王立鼎. 直齿圆柱齿轮三种齿厚参数的微量关系及应用[J]. 计测技术, 2021, 41(5): 52-57.

SUO L J, WANG L D. Increasement relationship and its application of three tooth thickness parameters of cylindrical gear[J]. Metrology and measurement technology, 2021, 41(5): 52-57.

高 h_x ，它们的计算公式分别为

$$S_x = \frac{\pi m}{2} \cos^2 \alpha_f \quad (1)$$

$$h_x = h_e - \frac{\pi m}{8} \sin 2\alpha_f - (R_e - R_e') \quad (2)$$

式中： α_f 为齿轮在分度圆上的压力角； m 为齿轮的模数； R_e 为理论齿顶圆半径； R_e' 为实测齿顶圆半径； h_e 为齿顶高。

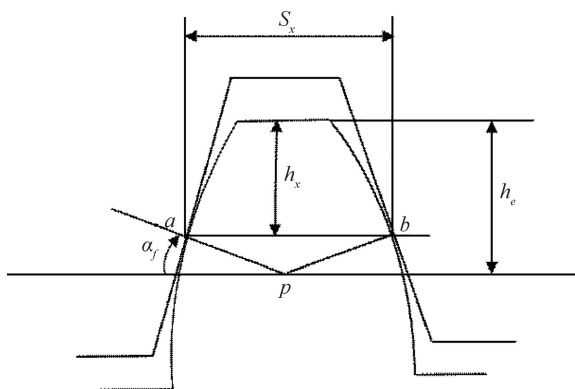


图1 固定弦齿厚

Fig. 1 Constant chord height

各种标准压力角直齿圆柱齿轮的 S_x ， h_x 简化公式如表 1 所示。

表 1 不变位直齿圆柱齿轮 S_x ， h_x 的简化计算公式

Table. 1 Simplified calculation formula of S_x and h_x of invariant spur gear

$\alpha_f / (^\circ)$	齿高系数	固定弦齿厚 S_x	固定弦齿高 h_x
20	1	$1.3871m$	$0.7476m - (R_e - R_e')$
20	0.8	$1.3871m$	$0.5476m - (R_e - R_e')$
15	1	$1.4656m$	$0.8037m - (R_e - R_e')$
14.5	1	$1.4723m$	$0.8096m - (R_e - R_e')$

由式(1)和表 1 可以看出，利用固定弦测量齿厚时不受齿轮的齿数影响，且此方法的计算比较简单。基于该方法的常用量具有：齿轮卡尺、齿厚测量仪、齿厚样板等。但是使用该方法时，齿轮的切向误差、径向误差以及齿顶圆对基准孔的径跳均会对齿厚测量的准确性产生影响^[8]，故该方法不适用于精密齿轮的齿厚测量，而是多用于 ISO 1328-1: 2013 标准^[9]中模数大于 1 的 7 级或 7 级精度以下的齿轮测量。

1.2 公法线长度的测量

图 2 中，直线 $\overline{AB}$ 为基圆的一条切线，它与基圆相切于 C 点。线段 $\overline{AC}$ 为齿形 aa_1 在 A 点的法线，线段

$\overline{CB}$ 为齿形在 bb_1 点的法线，故直线 $\overline{AB}$ 为公法线。

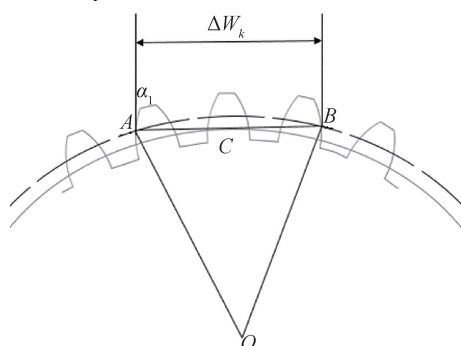


图 2 齿轮公法线长度

Fig. 2 Base tangent length

在 A 和 B 两点垂直于公法线 AB 的两直线，即为两齿形的切线，这两条切线互相平行，因此可以利用公法线千分尺的两个平行卡脚测量直齿圆柱齿轮公法线 AB 的长度 W_k ，计算公式为

$$\begin{cases} W_k = \overline{AB} = m \cos \alpha_f [(k - 0.5) \pi + z \sin \alpha_f] \\ k = 0.5 + \frac{\alpha_f}{180^\circ} z \end{cases} \quad (3)$$

式中： z 为齿轮的齿数； k 为跨测齿数。

由式(3)可以看出，利用公法线长度测量齿厚的方法的计算过程比利用固定弦测量齿厚的计算过程复杂，但由于采用该方法得到的测量值不受齿顶圆精度的影响，且公法线千分尺的示值分辨力为 0.05 mm，因此，该方法可以广泛应用于模数大于等于 0.5 的 7 级或 7 级精度以上齿轮的齿厚测量。

1.3 跨棒距的测量

跨棒距是一种间接测量齿厚的方法^[10]，其原理如图 3 所示。理论上，为了使 M 值确切地反映直齿圆柱齿轮齿厚的尺寸，量棒切线与齿面的接触点应在齿间的固定弦上，此时恰当的量棒直径应为 $d_p = \frac{\pi m}{2} \cos \alpha_f$ 。

当 $\alpha_f = 20^\circ$ 时， $d_p = 1.476m$ 。

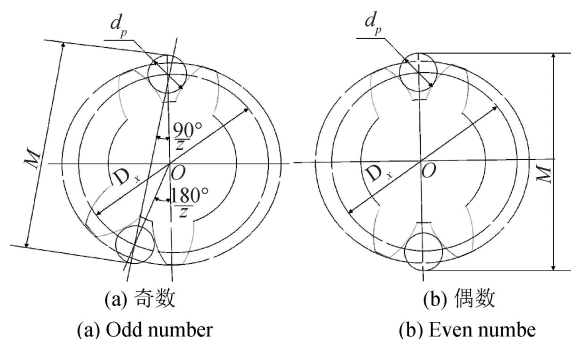


图 3 奇、偶齿数跨棒距测量

Fig. 3 Odd and even number of teeth across the rod pitch

由于选取 $d_p = 1.476m$, 而 M 值通常小于齿顶圆尺寸, 导致在模数较小的条件下难以实现 M 值的测量。目前, 在工程应用中通常采用的量棒为测量螺纹的三针量线, 测齿轮 M 值时, 其量棒按 $d_p = (1.68 \sim 1.9)m$ 选取, 接触点在齿轮分度圆附近。不变位的直齿圆柱齿轮 M 值的计算公式为

$$\begin{cases} M = D_x + d_p & (z \text{ 为偶数}) \\ M = D_x \cos \frac{90^\circ}{z} + d_p & (z \text{ 为奇数}) \end{cases} \quad (4)$$

式中: $D_x = \frac{\cos \alpha_f}{\cos \alpha_x} d_f$; $d_p = \pi m \cos \alpha_f (\text{inv} \alpha_x - \text{inv} \alpha_f + \frac{\pi}{2z})$ 。

虽然 M 值的计算比固定弦齿厚和公法线长度的计算更为复杂, 但是这种测量方法具有以下优点^[11]:

1) 适用于中小模数齿轮的齿厚测量, 特别是当齿轮模数 $m < 1$ 时, M 值测量的可行性更佳。

2) 测量结果精确、数值稳定。由于不需要测量基面, 该方法不受齿轮齿圈径向跳动的影响, 更不受齿顶圆误差的影响。

3) 反映齿厚偏差的灵敏度高。由于 $\Delta M = \Delta S_x \text{ctg} \alpha_f$, 在 $\alpha_f = 20^\circ$ 时, $\Delta M = 2.75 \Delta S_x$ (ΔM 为 M 值的变化量, ΔS_x 为固定弦齿厚的变化量), 因此较测量固定弦齿厚及公法线长度相比, 该方法的灵敏度更高。在齿轮的齿侧间隙要求十分严格的条件下, 选用该方法更具优势。

2 三种齿厚参数的微量关系

2.1 公法线长度与固定弦齿厚参数的微量关系

如图 4 所示, 当固定弦齿厚 S_x 出现一增量 $\Delta S_x = \overline{ac}$ 时, 齿面在法线方向的增量为 $\overline{ab}$, $\overline{ab}$ 即为公法线长度的增量, 即 $\Delta W_k = \overline{ab}$ 。在直角 Δabc 中, 由于 $\overline{ab} = \overline{ac} \cdot \cos \alpha_f$, 于是得到

$$\Delta W_k = \Delta S_x \cos \alpha_f \quad (5)$$

由于公法线长度测量通常在分度圆附近的齿面上进行, 因此式(5)是一个近似计算公式。

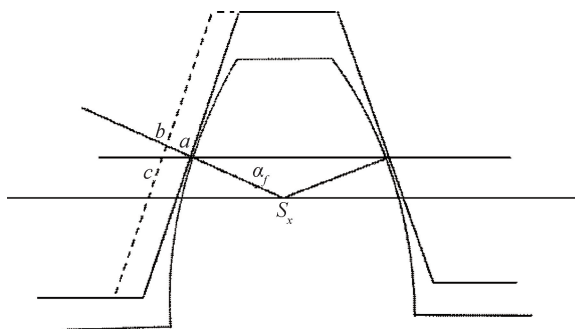


图 4 ΔW_k 与 ΔS_x 的关系

Fig. 4 Relationship between ΔW_k and ΔS_x

2.2 跨棒距测量尺寸与公法线长度的微量关系

对于偶数齿, 跨棒距测量尺寸与公法线长度测量之间的相对位置关系如图 5(a) 所示, M 与 W_k 的微量关系分析如图 5(b) 所示, 当左右齿面各存在 $\frac{\Delta W_k}{2}$ 时, 跨棒与齿面的接触点将由 a_1 移至 a_2 , 则 $\overline{a_1 a_2} = \frac{\overline{a_1 b}}{\sin \alpha_x}$, 可由式(6)得到式(7), 即

$$\begin{cases} \overline{a_1 a_2} = \overline{o_1 o_2} = \frac{\Delta M}{2} \\ \overline{a_1 b} = \frac{\Delta W_k}{2} \end{cases} \quad (6)$$

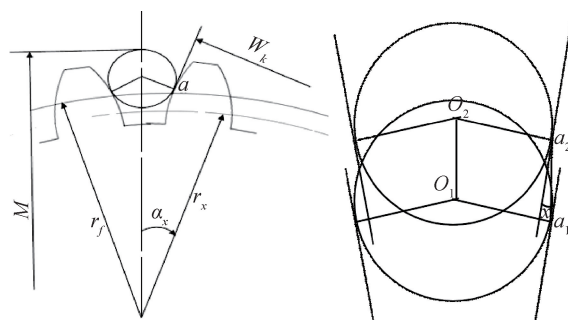
$$\Delta M = \frac{\Delta W_k}{\sin \alpha_x} \quad (7)$$

对于奇数齿, 其 ΔM 可表示为

$$\Delta M = \frac{\Delta W_k}{\sin \alpha_x} \cdot \cos \frac{90^\circ}{z} \quad (8)$$

当标准直齿圆柱齿轮、量棒与齿面的接触点在分度圆附近时, 有

$$\alpha_x \approx \alpha_f + \frac{90^\circ}{z} \quad (9)$$



(a) 跨棒距测量尺寸与公法线长度测量的相对位置关系

(b) M 与 W_k 的微量关系

(a) Relative position relationship between the rod pitch and the base tangent length

(b) The relationship between M and W_k

图 5 跨棒距测量尺寸与公法线长度测量之间的相对位置关系以及 M 与 W_k 的微量关系

Fig. 5 Relative position relationship between rod pitch and base tangent length, and relationship between M and W_k

2.3 跨棒距尺寸与固定弦齿厚的微量关系

将式(5)代入式(7), 得到

$$\begin{cases} \Delta M = \frac{\Delta S_x \cdot \cos \alpha_f}{\sin \alpha_x} & (z \text{ 为偶数}) \\ \Delta M = \frac{\Delta S_x \cdot \cos \alpha_f}{\sin \alpha_x} \cdot \cos \frac{90^\circ}{z} & (z \text{ 为奇数}) \end{cases} \quad (10)$$

近似计算时，有

$$\Delta M \approx \Delta S_x \cdot \text{ctg}\alpha_f \tag{11}$$

2.4 三种测量齿厚参数的微量关系

常用压力角条件下， ΔW_k 与 ΔS_x 的关系按式(5)计算，二者比值见表 2； ΔM 与 ΔW_k 的关系按式(7)和式(8)计算，二者比值见表 3 和表 4； ΔM 与 ΔS_x 的关系按式(9)计算，二者比值见表 5 和表 6。

表 2 ΔW_k 与 ΔS_x 的比值

Table. 2 Ratio of ΔW_k to ΔS_x

$\Delta\alpha_f/(\circ)$	$\Delta W_k/\Delta S_x$	$\Delta S_x/\Delta W_k$
20	0.940	1.06
15	0.996	1.04
14.5	0.968	1.03

表 3 偶数齿 ΔM 与 ΔW_k 的比值

Tab. 3 Ratio of ΔM to ΔW_k in even-numbered teeth

$\alpha_f/(\circ)$	$\Delta M/\Delta W_k$											
	8	10	12	16	20	30	46	90	180	360	720	∞
20	1.93	2.06	2.17	2.31	2.41	2.56	2.67	2.79	2.86	2.89	2.91	2.92
15	2.26	2.46	2.61	2.84	3.00	3.24	3.43	3.63	3.80	3.80	3.83	3.86
14.5	2.30	2.51	2.67	2.91	3.07	3.33	3.53	3.74	3.86	3.93	3.96	3.99

表 4 奇数齿 ΔM 与 ΔW_k 的比值

Table. 4 Ratio of ΔM to ΔW_k in odd-numbered teeth

$\alpha_f/(\circ)$	$\Delta M/\Delta W_k$											
	7	9	11	15	19	29	45	89	179	359	719	∞
20	1.79	1.97	2.10	2.27	2.38	2.54	2.67	2.79	2.85	2.89	2.91	2.92
15	2.09	2.33	2.51	2.78	2.95	3.21	3.42	3.62	3.74	3.80	3.83	3.86
14.5	2.12	2.37	2.57	2.84	3.02	3.30	3.52	3.74	3.86	3.93	3.96	3.99

表 5 偶数齿 ΔM 与 ΔS_x 的比值

Table. 5 Ratio of ΔM to ΔS_x in even-numbered teeth

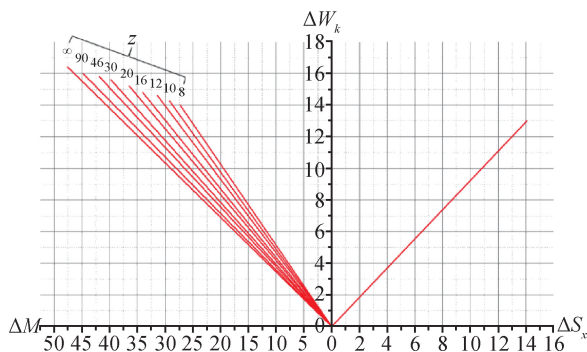
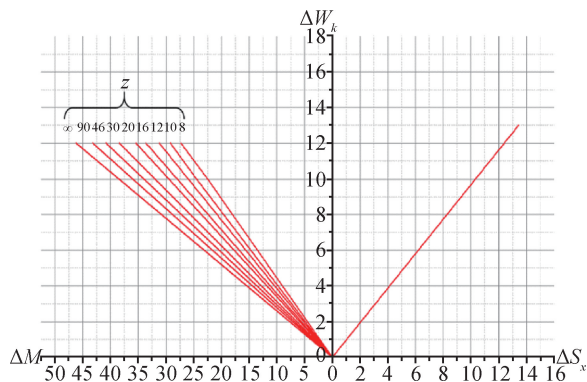
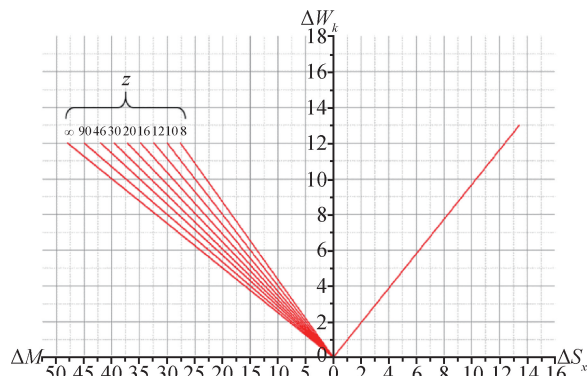
$\alpha_f/(\circ)$	$\Delta M/\Delta S_x$											
	8	10	12	16	20	30	46	90	180	360	720	∞
20	1.81	1.94	2.04	2.17	2.26	2.41	2.51	2.62	2.69	2.72	2.73	2.74
15	2.18	2.38	2.52	2.74	2.89	3.13	3.31	3.51	3.61	3.67	3.70	3.73
14.5	2.23	2.43	2.58	2.82	2.97	3.22	3.42	3.62	3.74	3.80	3.83	3.86

表 6 奇数齿 ΔM 与 ΔS_x 的比值

Table. 6 Ratio of ΔM to ΔS_x in odd-numbered teeth

$\alpha_f/(\circ)$	$\Delta M/\Delta S_x$											
	7	9	11	15	19	29	45	89	179	359	719	∞
20	1.68	1.85	1.97	2.13	2.24	2.39	2.51	2.62	2.68	2.72	2.73	2.74
15	2.02	2.25	2.42	2.69	2.85	3.10	3.30	3.50	3.61	3.67	3.70	3.73
14.5	2.05	2.29	2.49	2.75	2.92	3.19	3.41	3.62	3.74	3.8	3.83	3.86

从表 3 ~ 表 6 中可以得到, 当齿数较少时, 由于 $\cos \frac{90^\circ}{z} < 1$, 偶数齿的 $\frac{\Delta M}{\Delta W_k}$ 和 $\frac{\Delta M}{\Delta S_x}$ 数值均大于奇数齿。随着齿数增多, $\cos \frac{90^\circ}{z}$ 越来越趋近于 1, 相同条件下, 此时奇数齿的 $\frac{\Delta M}{\Delta W_k}$ 和 $\frac{\Delta M}{\Delta S_x}$ 数值可近似用偶数齿公式计算。例如 $z=7$ 时, $\cos \frac{90^\circ}{z} = 0.975$, 因此当奇数齿的齿数小于 7 时, 若仍然按偶数齿计算公式计算 $\frac{\Delta M}{\Delta W_k}$ 和 $\frac{\Delta M}{\Delta S_x}$ 的数值, 会产生 2.5% 的计算误差。考虑到工程上近似计算允许有少量误差, 因此, 在精度不高的情况下, 奇、偶齿数的 $\frac{\Delta M}{\Delta W_k}$ 和 $\frac{\Delta M}{\Delta S_x}$ 均可按偶数齿的计算公式进行计算。图 6 ~ 图 8 为各种常见压力角条件下 ΔM , ΔW_k 和 ΔS_x 三者的微量关系图。根据图 6 ~ 图 8, 在已知一个微量值的条件下, 可迅速查到相应的其他微量值。

图 6 $\alpha_f = 20^\circ$ 时三种齿厚参数的微量关系Fig. 6 Relationship of three tooth thickness parameters at $\alpha_f = 20^\circ$ 图 7 $\alpha_f = 15^\circ$ 时三种齿厚参数的微量关系Fig. 7 Relationship of three tooth thickness parameters at $\alpha_f = 15^\circ$ 图 8 $\alpha_f = 14.5^\circ$ 时三种齿厚参数的微量关系Fig. 8 Relationship of three tooth thickness parameters at $\alpha_f = 14.5^\circ$

3 三种齿厚参数微量关系的应用举例

3.1 用于公差换算

已知一个不变位的直齿圆柱齿轮, $\alpha_f = 20^\circ$, $z = 30$, 固定弦齿厚上偏差为 -0.020 mm, 下偏差为 -0.065 mm, 求其公法线长度或跨棒距尺寸的上偏差和下偏差。

由 $S_x^{-0.020}_{-0.065}$, 可按图 6 查得 $W_k^{-0.019}_{-0.061}$, $M^{-0.050}_{-0.155}$ 。

3.2 用于齿轮加工中的余量换算

一个正在磨削的齿轮, 其参数为 $\alpha_f = 14.5^\circ$, $z = 25$, 中途停止磨削进行 M 值测量, 发现按图纸上的最终尺寸尚有 $\Delta M = 31$ μm 的余量, 试计算砂轮在齿轮齿厚方向上的余量。

由 $\Delta M = 31$ μm , 可按图 8 查得 $\Delta W_k = 9.7$ μm 。

4 结论

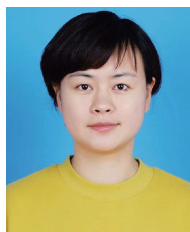
通过对固定弦齿厚、公法线长度与跨棒距三种齿厚参数转换关系进行推导, 得到了奇、偶齿的三种微量的转换列式。通过微量转换列式, 得出了三种常见压力角条件下三种齿厚参数的微量关系图。本文推导得出的转换列式和微量关系图为工程中三种齿厚参数的计算提供了便利, 具有技术借鉴意义。

参考文献

- [1] 谢竹铭. 齿轮检测[M]. 北京: 中国计量出版社, 1991.
XIE Z M. Gear detection[M]. Beijing: China Metrology Press, 1991. (in Chinese)
- [2] 李华敏. 齿轮机构设计与应用[M]. 北京: 机械工业出版社, 2007.
LI H M. Gear mechanism design and application[M]. Beijing: Machinery Industry Press, 2007. (in Chinese)
- [3] 齿轮手册编委会. 齿轮手册[M]. 北京: 机械工业出版

- 社, 2008.
- Gear manual editorial board. Gear manual[M]. Beijing: Machinery Industry Press, 2008. (in Chinese)
- [4] 赵韩, 吴其林, 黄康, 等. 国内齿轮研究现状及问题研究[J]. 机械工程学报. 2013, 49(19): 11-20.
- ZHAO H, WU Q L, HANG K, et al. Status and problem research on gear study[J]. Journal of mechanical engineering. 2013, 49(19): 11-20. (in Chinese)
- [5] 胥正皆. 基于CAXA 2009用图解法快速求解直齿轮齿厚测量尺寸[J]. 机械传动. 2013(2): 112-114.
- XU Z J. Quickly solving the tooth thickness measurement of the spur gear by graphical method based on CAXA 2009[J]. Mechanical transmission. 2013(2): 112-114. (in Chinese)
- [6] 王艳青, 雷振山. 基于机器视觉的齿轮测量技术[J]. 工具技术, 2007, 41(6): 118-121.
- WANG Y Q, LEI Z S. Gear measurement techniques with machine vision[J]. Tool technology. 2007, 41(6): 118-121. (in Chinese)
- [7] 杨玉敏, 周殿春, 王磊磊, 等. 渐开线圆柱齿轮测绘系统的设计与实现[J]. 机床与液压, 2008, 36(7): 132-133.
- YANG Y M, ZHOU D C, WANG L L, et al. Design and realization of the drawing and calculating system of the involute cylindrical gear[J]. Machine tool & hydraulics. 2008, 36(7): 132-133. (in Chinese)
- [8] 管堃. 渐开线直齿圆柱齿轮的测绘[J]. 科技情报开发与经济. 2007, 17(33): 157-158.
- GUAN K. The mapping of the involute straight toothed spur gear[J]. Sci-tech information development & economy. 2007, 17(33): 157-158. (in Chinese)
- [9] Cylindrical gears-ISO system of flank tolerance classification-Part 1: Definitions and allowable values of deviations relevant to blanks of gear teeth ISO 1328-1-2013[S]. 2013.
- [10] 尉慧. 渐开线齿轮测绘浅析[J]. 科技情报开发与经济. 2004, 14(9): 187-188.
- YU H. Analysis on surveying and mapping of the involute gear[J]. Sci-tech information development & economy, 2004, 14(9): 187-188. (in Chinese)
- [11] 李月美, 兰红. 齿轮测绘的计算方法[J]. 工具技术, 2001, 35(5): 41-42.
- LI Y M, LAN H. The calculation method on surveying and mapping of the gear[J]. Tool technology, 2001, 35(5): 41-42. (in Chinese)

作者简介



锁刘佳(1987-), 女, 浙江舟山人, 工程师, 博士, 主要从事高精度齿轮测试等方面的研究。2009年于河南科技学院信息工程专业, 获工学学士学位; 2012年于大连理工大学实验与应用力学专业, 获工学硕士学位; 2019年于大连理工大学实验与应用力学专业, 获工学博士学位。