

doi: 10.11823/j.issn.1674-5795.2020.02.04

双离心机法线加速度计动态校准中三参数余弦算法实现及应用

秦朝俊

(航空工业北京长城计量测试技术研究所, 北京 100095)

摘要: 在双离心机的线加速度计动态校准中, 三参数余弦算法贯穿在幅频特性、相频特性以及幅值线性度的整个测试中。本文详细描述了三参数余弦算法的概念和推导过程, 以及在双离心机线加速度计动态校准数据处理过程中三参数余弦算法的程序实现; 介绍了在幅频特性和相频特性中关于采集点的选取方式, 降低由于采集点选择方式不同对数据拟合精度造成的影响。选取某型线加速度计为例, 利用双离心机进行动态校准, 对采集得到的数据点进行曲线拟合并得到测试结果, 验证了所编写的三参数余弦算法程序的可行性。

关键词: 双离心机; 动态校准; 三参数余弦算法; 曲线拟合

中图分类号: TB934

文献标识码: A

文章编号: 1674-5795(2020)02-0020-06

Realization and Application of Three-parameter Cosine Algorithm in Dynamic Calibration of Double Centrifuge Linear Accelerometer

QIN Chaojun

(Changcheng Institute of Metrology & Measurement, Beijing 100095, China)

Abstract: In the linear accelerometer dynamic calibration of double centrifuge, three-parameter cosine algorithm runs through the entire test of the amplitude frequency characteristic, phase frequency characteristic and amplitude linearity. This paper describes the derivation process of the three-parameter cosine algorithm, its practical application in computational process of dynamic calibration of double centrifuge linear accelerometer, and the implementation of three-parameter cosine algorithm. And the paper introduces the selection method of collection points in the amplitude frequency characteristic and phase frequency characteristics, so as to reduce the impact of different selection methods on data fitting accuracy. When a linear accelerometer was taken as an example, double centrifuges were used for dynamic calibration, the accelerometer data are collected and calculated to give the fitting curve and the result, verifying the feasibility of the three parameter cosine algorithm program.

Key words: double centrifuge; dynamic calibration; three-parameter cosine algorithm; curve-fit

0 引言

在双离心机的动态校准中主要对被测加速度计的幅频特性、相频特性以及幅值线性度进行计量。在幅频特性和相频特性的计量中, 在被测加速度计工作频率范围内选取 n 个点^[1], 主离心机保持恒定加速度输出, 即输入正弦加速度信号峰值保持不变^[2], 从离心机同时进行变速和转角运动, 改变加速度计敏感轴输入角和频率, 达到产生正弦动态加速度的目的^[3], 实现加速度计动态校准^[4]。通过采集处理加速度计的输出值, 计算出每个频率点下的灵敏度和正弦分量的相位延迟。在幅值线性度计量中, 输入正弦加速度信号频率保持不变, 在

被测加速度计量程范围内选取 n 个点, 依次增大输入正弦加速度信号幅值^[1] (即从离心机保持恒定速度输出不变, 主离心机进行变速运动), 通过采集处理加速度计的输出值, 计算出幅值线性度。其中数据处理部分要对采集的加速度计的输出值进行三角曲线拟合, 用到的拟合算法均为三参数的余弦拟合算法。本文对三参数余弦算法的原理进行分析, 并介绍其在双离心机线加速度计动态校准数据处理过程中的实际应用和程序实现。同时介绍了在幅频特性和相频特性中采集点的优化选取方式。利用双离心机进行某型线加速度计动态校准, 对采集的数据点进行曲线拟合得到测试结果, 验证编写的三参数余弦算法程序的可行性。

1 三参数余弦算法

三参数余弦拟合, 特指信号频率已知时获取幅度、相位和直流偏移的波形拟合方法, 其宗旨是拟合函数和采样序列各点的残差平方和最小, 从而获得正弦波形序列最小二乘拟合结果。它是一种闭合算法, 无需迭代即能获得结果, 没有收敛问题, 具有良好的实用性^[5]。

在双离心机的动态校准中, 由于所用的测量工具、环境条件、测量方法、重复次数以及操作者不变, 即测量条件不变, 所以是等精度测量, 在这种情况下所进行的各次测量结果具有同等可靠程度, 具有同样的精度。为了使得残余误差 v 的平方和最小, 即 $p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \dots + p_n v_n^2 = \text{最小}$ (p 为各次测量结果的权重), 在等精度测量中, $p_1 = p_2 = \dots = p_n$, 残余误差平方和最小可写为: $v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 = \text{最小}$ 。

设理想正弦信号为

$$y(t) = C_0 \cos(2\pi ft + \theta_0) + D_0 = A_0 \cos(2\pi ft) + B_0 \sin(2\pi ft) + D_0 \quad (1)$$

式中: f 为频率; t 为时间; C_0, A_0, B_0, D_0 为参数。三参数余弦曲线拟合过程中, 数据采样序列为时刻 $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$, 输入角频率 ω 已知, 寻找 A, B, D , 使得式(2)的残差平方和 E 最小。

$$E = \sum_{i=1}^n [y_i - A \cos(\omega i) - B \sin(\omega i) - D]^2 \quad (2)$$

式中: i 为采样点数; 参数 A, B, D 为 A_0, B_0, D_0 的最小二乘拟合值。为寻找出 A, B, D , 构造以下矩阵

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cos\omega & \sin\omega & 1 \\ \cos(2\omega) & \sin(2\omega) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos(n\omega) & \sin(n\omega) & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} A \\ B \\ D \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

线性参数的误差方程可表示为

$$\mathbf{y} - \mathbf{M}\mathbf{X}_0 = \mathbf{E} \quad (4)$$

在等精度测量时, 残余误差平方和

$$Q = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 = \mathbf{E}^T \mathbf{E} \quad (5)$$

为了求最佳估计值 A, B, D 使得式(5)的值最小, 可利用求极值的方法来满足上式的条件, 因为残余误差平方和大于等于 0, 所以一定存在极小值, 即当一阶

导数等于 0 ($\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{X}_0} = 0$), 二阶导数大于 0 ($\frac{\partial^2 Q}{\partial \mathbf{X}_0^2} > 0$) 时, 残余误差平方和最小, 即

$$\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{X}_0} = \frac{\partial (\mathbf{E}^T \mathbf{E})}{\partial \mathbf{X}_0} = 2 \frac{\partial \mathbf{E}^T}{\partial \mathbf{X}_0} \mathbf{E} = 0 \quad (6)$$

将 $\mathbf{y} - \mathbf{M}\mathbf{X}_0 = \mathbf{E}$ 代入得

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\mathbf{y} - \mathbf{M}\mathbf{X}_0)^T}{\partial \mathbf{X}_0} \cdot \mathbf{E} &= \frac{\partial (\mathbf{y}^T - \mathbf{X}_0^T \mathbf{M}^T)}{\partial \mathbf{X}_0} \cdot \mathbf{E} \\ &= \left[\frac{\partial \mathbf{y}^T}{\partial \mathbf{X}_0} - \frac{\partial (\mathbf{X}_0^T \mathbf{M}^T)}{\partial \mathbf{X}_0} \right] \cdot \mathbf{E} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

式中: \mathbf{y}^T 为常数矩阵; \mathbf{M}^T 为系数矩阵的转置矩阵。则式(7)可以写为

$$\mathbf{M}^T \mathbf{E} = \mathbf{M}^T (\mathbf{y} - \mathbf{M}\mathbf{X}_0) = \mathbf{M}^T \mathbf{y} - \mathbf{M}^T \mathbf{M} \mathbf{X}_0 = 0 \quad (8)$$

化简公式(8)得到

$$(\mathbf{M}^T \mathbf{M}) \mathbf{X}_0 = \mathbf{M}^T \mathbf{y} \quad (9)$$

也可写为

$$\mathbf{X}_0 = (\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} \cdot \mathbf{M}^T \mathbf{y} \quad (10)$$

拟合函数的幅值 C 和相位 θ 表达形式为^[6]

$$y(i) = C \cos(\omega i + \theta) + D \quad (11)$$

其中

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad (12)$$

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{-B}{A}\right); A \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{-B}{A}\right) + \pi; A < 0 \end{cases} \quad (13)$$

2 三参数余弦算法的程序实现

根据三参数余弦算法的计算过程, 采用软件 Visual Studio 2013 进行编程, 程序实现分为以下步骤: 建立 \mathbf{M} 矩阵、求 \mathbf{M} 转置矩阵、 $\mathbf{M}^T \mathbf{M}$ 矩阵、 $(\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1}$ 矩阵、 $\mathbf{M}^T \mathbf{y}$ 矩阵、 $(\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{y}$ 矩阵。其中 \mathbf{M}^T 为 3 行 n 列矩阵, \mathbf{M} 为 n 行 3 列矩阵, \mathbf{y} 为 n 行 1 列矩阵, n AcqTime 为采样点数, Freq 为输入频率, acqData 为采集到的实际值。图 1 为计算流程图。

从流程图中可以看出构建正确的 \mathbf{M} 矩阵和 \mathbf{y} 矩阵, 对正确处理数据起到关键作用, 以下是构建的过程。

1) \mathbf{M} 矩阵

```
for (i = 0; i < nAcqTime; i++) //存放 M 矩阵的值, 0.01 表示采样间隔为 10 ms
```

```
{
```

```
    M[i][2] = 1;
```

```
    M[i][1] = sin(2 * PII * Freq * (i + 1) * 0.01);
```

```
//Freq 为输入频率
```

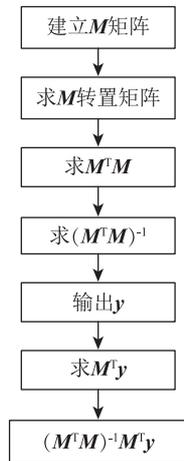


图 1 计算流程图

据采集流程如图 2 所示。

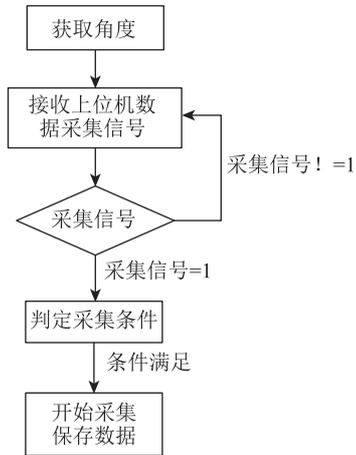


图 2 数据采集流程图

```
M[i][0] = cos(2 * PII * Freq * (i + 1) * 0.01);
```

2)y 矩阵

```
for (i = 0; i < nAcqTime; i++)
```

```
{
    yout[i][0] = g_ AcqData -> acqData[i]; //
```

acqData 为采集到的加计输出值。

```
}
```

根据流程图计算顺序计算出 $(M^T M)^{-1} M^T y$ ，计算结果存放在 result 矩阵中，result 矩阵为 3 行 1 列矩阵，其中的数据即为要求的最佳拟合值 A, B, D 。

3 幅、相频测试中采集点的获取

根据被测加速度计的幅频特性和相频特性测试的测试过程和计算结果分析，被测加速度计的幅频特性和相频特性完全可以测试一次得出结论。确定被测加速度计质心精确位置是困难的，根据被测加速度计的输出多次调整工装安装位置，尽量减少质心与从离心机旋转轴安装偏差^[7-10]。考虑到初始相位角的计算条件一致性问题，在确定被校加速度计初始相位后，将从离心机光栅编码器进行光学寻零位后，再转过初始相位角，数显表角度归零。

为了保证每个频率点的采集数据有效，需要保证开始采集数据时，从离心机转过的角度刚好是 360° 的整数倍。当接收到采集的信号时，判断上一次采集的角度/360，并向下取整，当前采集的角度/360，并向下取整，两者相减，刚好等于 1。这样就保证了当前开始采集的角度刚好是过 360° 的整数倍的角度，减少相位延迟的计算不会产生因为采集数据造成的影响。数

数据采集程序为：

```

pos = PCodeFuncPort ( Axis_ Func_ Get_ CurPos )
-> getCurPos ();
if ( g_ CmdData -> bAcqFlag[ id ] )
{
    if ( abs ( floor ( lastPos / 360 ) - floor ( pos / 360 ) ) == 1 )
    {
        RtSetEvent ( hAcqEvent[ id - 1 ] );
        g_ RptData -> bAcqReceived[ id ] = TRUE;
        g_ RptData -> startAcqpos[ id ] = pos;
        g_ CmdData -> bAcqFlag[ id ] = 0;
        g_ AcqData -> count = 0;
        g_ AcqData -> bAcqfinish = FALSE;
    }
}
lastPos = pos;
    
```

4 曲线拟合以及校准结果

选用某型线加速度计进行幅频、相频特性试验，基于双离心机的技术指标^[8]，选定主离心机复现正弦加速度幅值 100 m/s^2 ，从离心机给定频率 0.1, 1, 5, 10 Hz 四个频率点，进行此型线加速度计动态校准试验。图 3 至图 6 中给出的是采集板卡采集加速度计电压后的实测曲线。

通过式(14)，根据采样点数、选定的采集频率及采集到的加速度计输出值构建 M 矩阵和 y 矩阵，依据图 1 的流程图，计算出 $(M^T M)^{-1} M^T y$ ，可求出 X_0 矩阵中 A, B, D 的值，进而求得拟合幅值和相位。

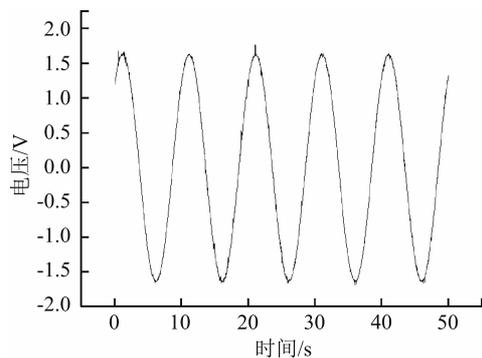


图3 0.1 Hz 实测曲线

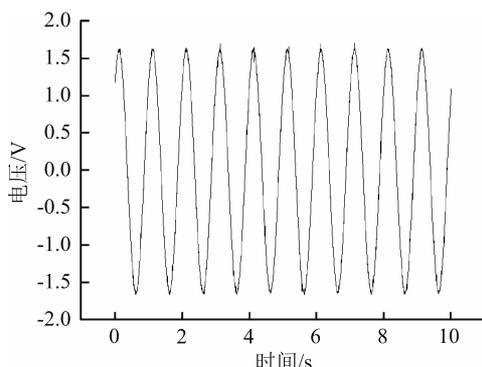


图4 1 Hz 实测曲线

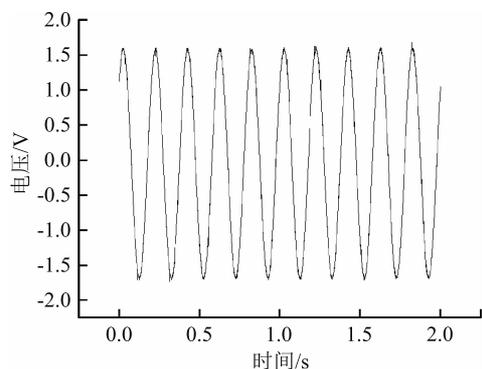


图5 5 Hz 实测曲线

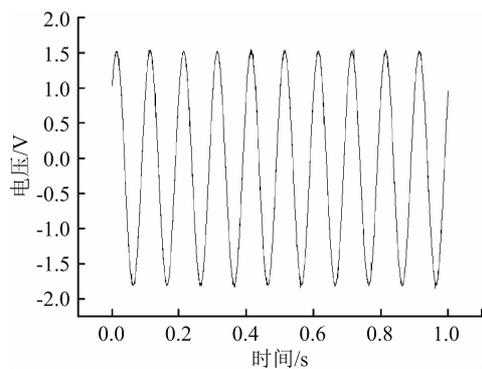


图6 10 Hz 实测曲线

$$y(t) = A_0 \cos(2\pi ft) + B_0 \sin(2\pi ft) + D_0 \quad (14)$$

通过拟合运算可以得到回归值曲线，如图7至图10所示。

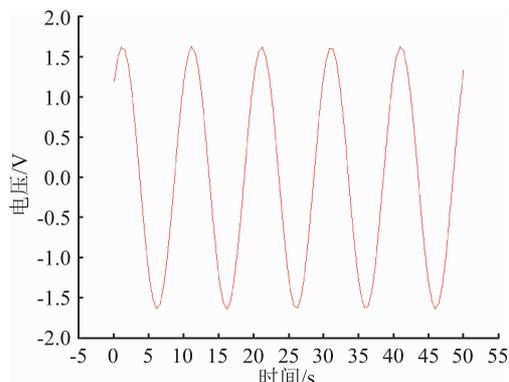


图7 0.1 Hz 拟合曲线

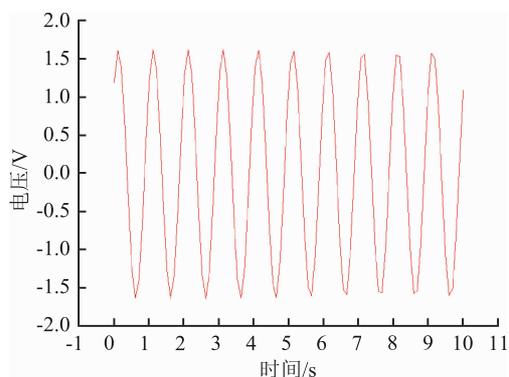


图8 1 Hz 拟合曲线

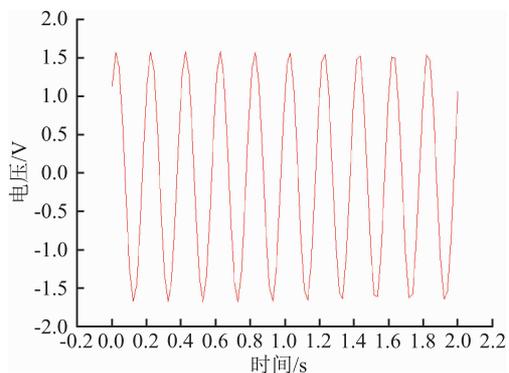


图9 5 Hz 拟合曲线

根据计算得到对应频率点下加速度计的灵敏度 S_i ，以加速度计在重力场下的标度因数 S_0 为参照，依据式(15)进行归一化处理，求出加速度计在相应频率点的比值，计算结果如表1和表2所示。

$$K_i = \frac{S_i}{S_0} \quad (15)$$

式中： i 为频率点数， $i=1, 2, 3, \dots, n_0$ 。

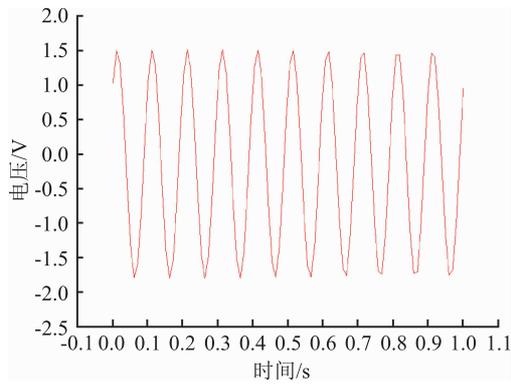


图 10 10 Hz 拟合曲线

表 1 幅频特性校准(输入峰值为 100 m/s²)

频率/ Hz	输出峰值平均/V
0.1	1.6289830
1	1.6286367
5	1.6347482
10	1.6578703

表 2 归一化处理后的灵敏度

频率/ Hz	灵敏度 $S_i/(V \cdot (m/s^2)^{-1})$	归一化灵敏度
0.1	0.01628983	1.0006038
1	0.01628636	1.0003911
5	0.016347482	1.0041451
10	0.016578703	1.0183478

通过起始试验确定加速度计初始相位角 $\bar{\varphi}_0$ ，并通过动态校准数据拟合计算出各频率点下的相位角 $\bar{\varphi}_i$ ，根据式(16)得到对应频率点下的相位延迟角 $\Delta\varphi_i$ ，计算结果如表 3 和表 4 所示。

$$\Delta\varphi_i = \bar{\varphi}_i - \bar{\varphi}_0 \quad (16)$$

表 3 相频特性校准(输入峰值为 100 m/s²)

频率/ Hz	相位平均值/(°)
0.1	-42.6
1	-42.8
5	-43.7
10	-44.9

表 4 各个频率点的相位延迟

频率/ Hz	相位延迟/(°)
0.1	-0.15
1	-0.37
5	-1.18
10	-2.45

最终通过动态校准实验测试计算结果即可获到某型加速度计的幅频特性和相频特性曲线，如图 11 和图 12 所示。通过以上实验，证明本文编写的三参数余弦算法程序在双离心机法线加速度计动态校准中具有运行高效、准确、智能化程度高等各项优点，具有很好的可行性与实际应用价值。

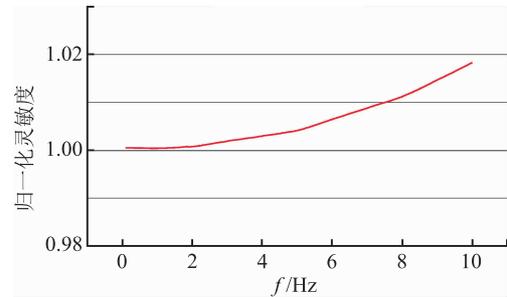


图 11 幅频特性曲线

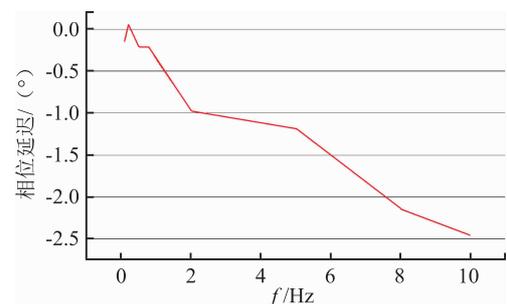


图 12 相频特性曲线

5 结论

选用加速度计进行动态校准并对获取的试验点进行数据拟合，按照最小二乘法条件计算，能够充分利用误差的抵偿作用，有效降低随机误差的影响，所得到的结果具有最可依赖性。三参数余弦算法的推导就是建立在以上条件下进行的，由于实际测量问题多属线性，而且非线性参数借助于级数展开的方法可在某一区域近似地转化成线性的形式，所以整个推导过

程用的是线性参数的测量方程。

在双离心机的动态校准中,加速度计的幅频特性、相频特性、幅值线性度参数的准确获取,关键在于数据处理过程中的三角曲线拟合,因此三参数余弦算法贯穿在整个动态校准过程中,具有关键作用,数据处理的结果直接体现出被测加速度计的本身特性。双离心机线加速度计动态校准中数据采集处理的程序化,极大地提高了测试效率和测试精度,为加速度计动态特性的测试工作提供重要支撑。

参 考 文 献

- [1] JJF 1426-2013 双离心机法线加速度计动态特性校准规范[S]. 北京:中国质检出版社,2013.
- [2] 廖建平,龙祖洪,徐永,等.基于双离心机的正弦加速度数学模型的建立[J].中国惯性技术学报,2007(2):128-130.
- [3] 徐永,董青华,贺忠江,等.加速度计动态校准装置的研究[J].计测技术,2007,27(3):19-21,46.
- [4] 熊磊,贺忠江,余臻.基于双离心机的加速度计动态校准装置[J].测控技术,2016,35(1):143-146.
- [5] 梁志国,张大治,孙璟宇,等.四参数正弦波曲线拟合的快速算法[J].计测技术,2006,26(1):6-9,49.
- [6] 廖建平,常欢,田阳,等.基于双离心机的线加速度计动态校准[J].测试技术学报,2009,23(4):283-287.
- [7] IEEE Std 836-2009, IEEE Recommended Practice for Precision Centrifuge Testing of Linear Accelerometers[S]. IEEE-SA Standards Board, 2009.
- [8] 熊磊,欧阳恒,廖建平,等.线加速度计在不同量程下的动态校准[J].弹箭与制导学报,2015,35(4):155-159.
- [9] 董雪明,刘克先,黄晓铮,等.加速度计专用动态实验装置[J].计测技术,2001,21(2):33-37.
- [10] 郭鑫.加速度计动态特性测试系统的集成与实现[D].北京:北京化工大学,2015.

收稿日期:2020-01-16;修回日期:2020-03-17

作者简介

秦朝俊(1990-),男,工程师,研究生,主要从事惯性校准技术研究工作。

