

doi: 10.11823/j.issn.1674-5795.2016.02.02

一种新型的谐振梁频率测量方法研究

赵晨, 樊尚春, 曹乐

(北京航空航天大学 仪器科学与光电工程学院, 北京 100191)

摘要: 谐振梁是一种应用广泛的谐振器。谐振式传感器可以通过测量谐振梁谐振频率的变化, 解算谐振梁所受的轴向载荷的大小, 从而达到测量目的。目前谐振梁常用的频率测量方法对于动态测量问题的效果并不理想, 在很多应用场合都受到限制。本文针对双端固支型谐振梁的频率测量问题, 设计了一种基于希尔伯特变换的频率测量方法。使用数值方法对谐振梁振动方程进行求解, 获得多种典型的测试信号。仿真实验表明, 该方法能很好地获取动态信号频率。

关键词: 谐振梁; 频率测量; 动态; 希尔伯特变换

中图分类号: TB973; TN713.2

文献标识码: A

文章编号: 1674-5795(2016)02-0004-04

A Novel Method of Frequency Measurement for Resonant Beam

ZHAO Chen, FAN Shangchun, CAO Le

(School of Instrument Science & Opto-electronics Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract: Resonant beam is a kind of widely used resonator. The axial load can be solved by measuring the resonant frequency of the beam, and the measurement purpose is achieved. The current frequency measurement method of resonant beam is not effective for dynamic circumstances and is restricted in many applications. In this paper, we focus on the problem of the frequency measurement of the double ended resonant beam, and propose a method based on Hilbert transform. Numerical method is used to solve the vibration equation of the resonant beam, and a variety of typical test signals are obtained. The simulation results show that the method can precisely obtain the frequency of dynamic signal.

Key words: resonant beam; frequency measurement; dynamic; Hilbert transform

0 引言

双端固支谐振梁是一种常用的谐振器, 它具有稳定性好, 重复性好, 分辨力高等特点^[1]。双端固支梁可以作为直接输出频率型谐振式传感器的敏感元件^[2-3], 或者激光测振仪的测试样件^[4-5]。谐振频率是谐振梁的重要参数, 其测量的准确性将直接影响谐振梁的测试性能。目前常用的谐振梁频率测量方法主要是频率测量法和周期测量法^[6-7], 它们分别对于高频信号和低频信号具有较高的测量精度。但是这两种

测量方法都需要保证谐振梁在一个测量周期内的振动频率不发生改变, 即适合静态测量问题。对于动态测量, 或者瞬时特性较强的测量问题, 这两种方法不能很好地获得振动频率。

为解决上述问题, 本文提出了一种基于希尔伯特变换的频率测量方法。以受轴向载荷的双端固支谐振梁为研究对象, 使用数值方法求解谐振梁在轴向载荷作用下的自由振动方程, 获得一些典型载荷下的谐振梁振动响应曲线, 对算法进行了测试。

1 双端固支梁振动方程

在分析谐振梁的动力学特性时, 假设梁为欧拉-伯努利梁^[8], 即总假设梁只有弯曲变形, 而没有剪切变形, 并且横截面在变形前和变形后都垂直于中心轴。谐振梁的振型时变函数 $q(t)$ 可看成是一个质量块-阻尼-弹簧系统, 可以表示为

$$M_{\text{eff}}\ddot{q}(t) + B_{\text{eff}}\dot{q}(t) + K_{\text{eff}}q(t) = 0 \quad (1)$$

式中: M_{eff} , K_{eff} , B_{eff} 分别表示系统的等效质量、等效

收稿日期: 2016-01-25

基金项目: 国家重大科学仪器设备开发专项(2014YQ350461); 国家自然科学基金资助项目(61431063); 北京航空航天大学研究生创新实践基金(YCSJ-01-2015-05); 长江学者和创新团队发展计划资助(IRT1203)

作者简介: 赵晨(1991-), 男, 辽宁大连人, 硕士研究生, 研究方向: 振动陀螺动态特性; 樊尚春(1962-), 男, 内蒙古包头人, 教授, 博士生导师, 研究方向: 先进传感技术及其应用, MEMS 传感器及其系统。

刚度和等效阻尼。文献[9-10]给出了谐振梁的固有角频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{\text{eff}}}{M_{\text{eff}}}} = \sqrt{\frac{\int_0^1 \frac{EI}{L^3} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} \right)^2 d\tau + \int_0^1 \frac{F}{L} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right)^2 d\tau}{\int_0^1 \rho A L \varphi^2 d\tau}} \quad (2)$$

$$\omega_0 = \left(\frac{4.730}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (3)$$

式中： E 为杨氏模量； I 为梁横截面对中线的惯性矩； L 为谐振梁的长度； φ 为谐振梁的振型函数； A 为梁的横截面积； F 为轴向力； ρ 为谐振梁材料的密度。

由式(2)可知，在谐振梁结构参数固定的情况下，谐振梁的固有角频率 ω_n 是轴向力 F 的单值函数。只有准确获得 ω_n ，才能解算出被测力。由式(1)和式(2)可以得到双端固支谐振梁在轴向力 F 的作用下的自由振动方程为

$$\ddot{q}(t) + \omega_0^2 \left(1 + \frac{0.293FL^2}{12EI} \right) q(t) = 0 \quad (4)$$

2 动态频率测量方法

动态信号通常具有较强的局部瞬时特性，短时傅里叶变换(STFT)是较早使用的时频分析方法，对于局部平稳时间较长的信号可以较准确地估计出瞬时频率。但是由于这种方法还比较依赖于传统的傅里叶分析方法，所以在分辨力方面具有一定的局限性。时域分辨力的提高会导致频域分辨力的减小，提高采样点数可以增加频域分辨力，但是会大大增加计算量。

时频分析难免会受到时域分辨力和频域分辨力的相互制约。希尔伯特变换是信号分析处理的重要工具之一，被广泛应用于振动信号的分析。由于希尔伯特变换不改变信号域，所以可以获得很高的分辨力。希尔伯特变换可以用于构造解析信号，求信号的包络谱、瞬时频率^[11]。

通过希尔伯特变换，使得我们对复杂信号的瞬时参数的定义及计算成为可能，能够实现真正意义上的瞬时信号的提取^[12]。但是想要获得有意义的瞬时频率，需要被变换的信号满足本征模态函数(Intrinsic Mode Function - IMF)的两个条件^[13]：信号极值点的数量与零点数量相等或相差1；信号由极大值定义的上包络和由极小值定义的下包络的局部均值为零。将信号分解出IMF的过程称为黄变换。理想的谐振梁的输出信号满足IMF条件，可以直接利用希尔伯特变换求出有意义的瞬时频率。

函数 $x(t)$ 的希尔伯特变换被定义为 $x(t)$ 与函数

$h(t) = \frac{1}{\pi t}$ 的卷积，即

$$\hat{x}(t) = H[x(t)] = x(t) * h(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t} \quad (5)$$

信号通过希尔伯特变换器后，幅值不发生改变，相位移动 $\pi/2$ 。以希尔伯特变换 $\hat{x}(t)$ 作为虚部，原信号 $x(t)$ 作为实部，可以构造解析信号：

$$z(t) = x(t) + j\hat{x}(t) \quad (6)$$

解析信号 $z(t)$ 的相位定义为 $x(t)$ 的瞬时相位，瞬时相位的微分即是 $x(t)$ 的瞬时频率：

$$f_{\text{inst}}(t) = \frac{d[\text{angle}[z(t)]]}{dt} \quad (7)$$

计算时发现，使用式(7)求解微分会引起系统不稳定，而且由于相位只能在 $-\pi$ 到 $+\pi$ 之间变化，在 $-\pi$ 和 $+\pi$ 之间的突变会引起瞬时频率产生一个很大的尖峰，造成极大危害。在实际的系统设计中，希尔伯特变换通常使用DSP芯片实现，因处理的是离散信号，可以使用公式(8)求解瞬时频率，即

$$f_{\text{inst}}(n) = \frac{\text{angle}[-z(n) \cdot \overline{z(n-1)}] + \pi}{2\pi} \quad (8)$$

式中： $z(n)$ 为第 n 个采样点处的信号值； $\overline{z(n-1)}$ 为第 $n-1$ 个采样点处信号的共轭值。也即使用公式(8)可解算出动态信号的瞬时频率。

3 算法测试

由第二节的分析可知，谐振梁的振动响应就是式(4)的解。为了便于分析，设计梁的结构参数为：梁的长度 $L=30$ mm，宽度 $w=3$ mm，厚度 $h=0.3$ mm。对于尺度较大的谐振梁，经常使用的制作材料是钢，密度 $\rho=7.8 \times 10^3$ kg/m³，杨氏模量 $E=2 \times 10^{11}$ Pa。则由式(3)可以计算，谐振梁的固有频率为 $f_0=1735$ Hz。将具体结构参数代入式(4)，可以得到谐振梁的振动方程为

$$\ddot{q}(t) + (1735 \times 2\pi)^2 \times [1 + 1.63 \times 10^{-2} F(t)] q(t) = 0 \quad (9)$$

谐振频率的理论值为

$$f_n = 1735 \sqrt{1 + 1.63 \times 10^{-2} F(t)} \quad (10)$$

式中： $F(t)$ 是随时间变化的载荷。

式(9)是受参数激励的二阶微分方程，对于恒定的载荷 F ，式(9)退化为普通的谐振子二阶微分方程，是静态测量问题。对于随时间变化的、复杂的载荷 $F(t)$ ，式(9)无法获得精确的解析解。在仿真实验测试中，使用数值方

法求解是十分合适的方法。考虑实际的应用情况,选取 $F(t)$ 为阶跃信号、正弦波和三角波时,使用4阶龙格-库塔法求解的谐振梁的振动响应曲线如图1所示。

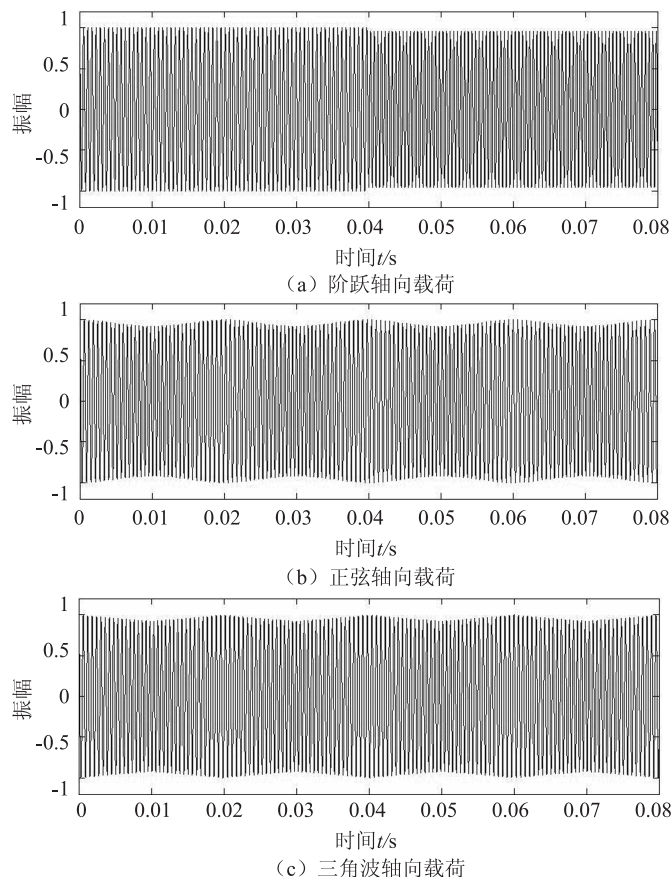


图1 典型载荷下谐振梁振动响应曲线

从图1(a)可以看出,对于轴向阶跃载荷,常值载荷的作用时间内谐振梁的输出特性为标准正弦曲线。图1(b), (c)是周期性轴向载荷作用下的谐振梁的输

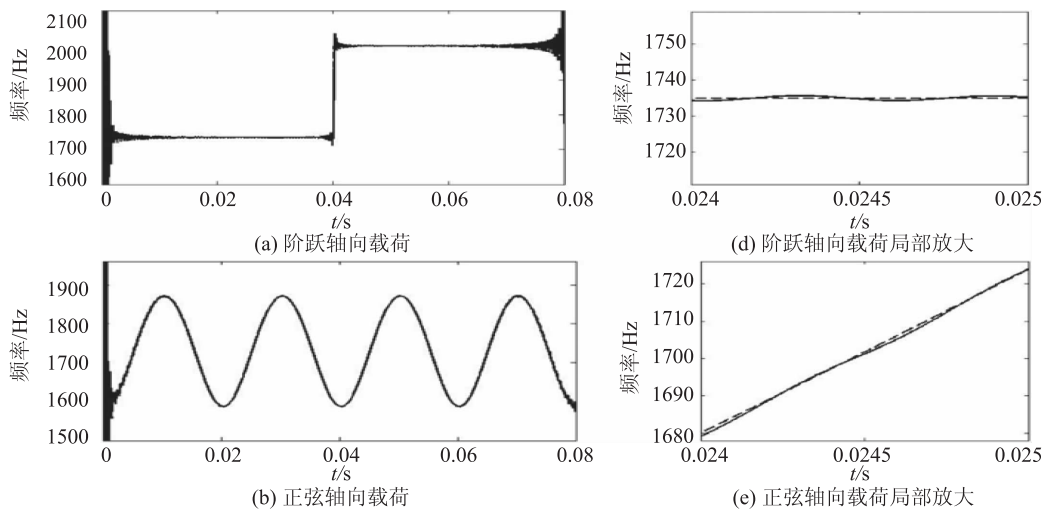
出信号,可以看出信号具有调幅调频特性,幅度和频率随时间连续变化,具有局部瞬时特性。对图1所示信号进行希尔伯特变换,并使用式(8)计算瞬时频率,得到的瞬时频率曲线如图2实线所示。作为对比,由式(10)计算得到的瞬时频率理论值用虚线表示。

从图2(a)~(c)可以看出,求解出的瞬时频率与理论值的符合度很高,可以证明算法的正确性。在变换的边缘,求解的瞬时频率呈现明显的波动,但是在中间部分,这种波动并不明显,因为希尔伯特变换的中间部分比边缘部分的精度更高。同时,在曲线的不光滑处也会具有一定的误差,因为系统对于瞬时频率跳变的跟踪具有一定的稳定时间。图2(d)~(f)是分别对应于图2(a)~(c)的中间局部放大图,从局部放大图中可以看到计算值与理论值的细微差异。经计算,图2(a)~(c)的中间变换部分的一个周期内,瞬时频率的计算值与理论值的最大相对误差分别为0.0622%, 0.0291%, 0.108%, 具有很高的精度。

为了避免变换边缘波动引入的误差,我们可以取多段长信号应用解调算法,并使相邻变换的信号具有一定的重叠,对每段变换的中间部分使用式(8)求解瞬时频率。但是变换长度和数量的增加,会导致运算速度变慢。在实际应用中,综合考虑解调精度和速度,合理选择变换长度将是重点之一。

4 小结

本文围绕双端固支谐振梁的动态测量问题,分别在阶跃、正弦和三角波的轴向载荷作用下,使用数值方法求解谐振梁的振动方程。得到的振动响应曲线具有局部瞬时特性,通过分析信号的瞬时频率,设计了



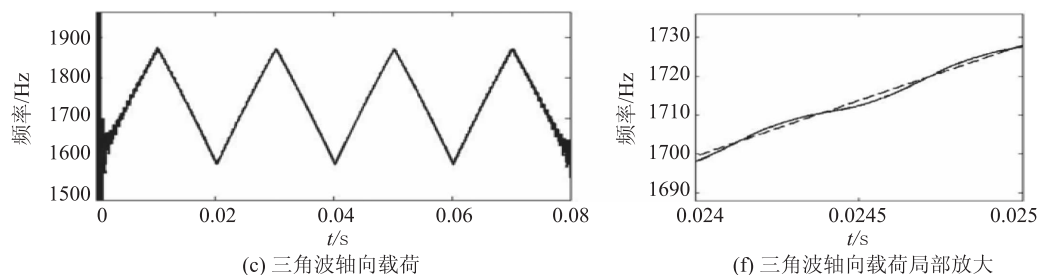


图2 谐振梁瞬时频率的理论值与计算值

一种基于希尔伯特变换的频率测量方法。仿真实验表明,该算法对于动态信号瞬时频率的测量具有很高的精度。但是信号变换的边缘具有一定的波动性,对算法进行优化,补偿变换边缘的误差,将是进一步工作的重点。

参考文献

- [1] 樊尚春. 传感器技术及应用[M]. 2版. 北京: 北京航空航天大学, 2010.
- [2] Seshia A A, Howe, R T, Montague S. An integrated microelectromechanical resonant output gyroscope [C]//Proc., The Fifteenth IEEE Int. Conf. on Micro Electro Mechanical System (MEMS 2002). Las Vegas: IEEE, 2002: 722-726.
- [3] Sun J H, Fan S C, Shi H C, et al. Design and optimization of a resonant output frequency gyroscope for robust sensitivity and bandwidth performance[J]. Microsystem Technologies, 2015; 1-22. DOI: 10.1007/s00542-015-2730-1.
- [4] 卢喜丰. 实验模态分析与激光测振技术研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2007.
- [5] 张合富, 朱振宇, 朱国勤. 激光测振仪校准技术评述[J]. 计测技术, 2014, 34(6): 5-8.
- [6] 李琰, 李森林. 应用于硅微谐振式传感器的等精度频率计

(上接第3页)

的必要性、技术发展现状进行了综述,并对未来质心测量和校准技术的发展趋势进行了展望,提出了一些见解,这些见解对提高国内质心测量设备的准确性、研究质心测量设备的校准方法、开展质心现场动态校准研究具有一定的借鉴作用。

参考文献

- [1] 张敏专, 张合新. 弹道导弹变质心控制入轨研究[J]. 控制工程, 2008, 15(4): 426-428.
- [2] Ross B P, McLeod C. Upgrade of the Goddard Space Flight Center's mass properties measuring facility[J]. Dupad. hku. h k, 2004, 129(3360): 1415-1416.
- [3] Hull R A, Gilbert J L, Klich P J. Computer program for determining mass properties of a rigid structure[R]. NASA T M 78681. 1978.
- [4] Hahn H, Niebergall M. Development of a measurement robot for

设计[J]. 传感器与微系统, 2014, 33(4): 80-82.

- [7] 杨霓清. 用单片机实现精密测频的方法[J]. 山东大学学报(工学版), 2003, 33(5): 534-537.
- [8] 郭日修. 弹性力学与张量分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.
- [9] Fan S C, Li Y, Guo Z S, et al. Dynamic characteristics of resonant gyroscopes study based on the Mathieu equation approximate solution[J]. Chinese Physics B, 2012, 21(5): 58-65.
- [10] 倪振华. 振动力学[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1989.
- [11] 王曙光, 曾向阳, 王征, 等. 水下目标的 Gammatone 子带降噪和希尔伯特-黄变换特征提[J]. 兵工学报, 2015, 36(9): 1704-1709.
- [12] 王青华, 沈润杰, 任涛, 等. 基于 HHT 的风力发电机塔筒振动信号处理算法[J]. 中国科技信息, 2015(6): 25-27.
- [13] Huang N E, Shen Z, Long S R, et al. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis[J]. Proceedings of the Royal Society A Mathematical Physical & Engineering Sciences, 1998, 454(1971): 903-995.

identifying all Inertia parameters of a rigid body in a single experiment[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2001, 9(2): 416-423.

- [5] 张烈山. 多组舱段质量质心测量设备关键技术研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2012.
- [6] Space Electronics LLC. CG measurement[EB/OL]. [2015-11-20]. <http://www.space-electronics.com/Products/se8913>.
- [7] IABG. Determination of Inertia Characteristics[EB/OL]. [2015-12-10]. <http://www.iabg.de/en/business-fields/space/determination-of-inertia-characteristics-mpm/>.
- [8] 南京理工大学. 全自动弹筒质量质心偏心测试仪[EB/OL]. [2015-12-10] <http://www.zxgl.cn/goods/show-176.html>.
- [9] 王超. 大尺寸飞行器质量特性测量关键技术研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2014.
- [10] 宗华. 重新定义千克试验经多年努力达成一致[EB/OL]. (2015-10-20) [2015-12-10]. <http://news.sciencenet.cn/htmlnews/2015/10/328964.shtm>.