

doi: 10.11823/j.issn.1674-5795.2025.05.01

数模变换量化误差固有特性再讨论

陆祖良*, 杨雁, 张钟华

(中国计量科学研究院, 北京 100029)

摘要: 为了在数模转换中准确实现预设相角, 一般采用增加转换分辨力的方法, 这实质上是在幅值轴方向上进行精细分割以接近原始信号, 存在成本高、速度慢、功耗大等不足。针对上述问题, 进一步提出在时间轴方向上进行适当分割的方法。为此论述量化误差包括相角量化误差和幅值量化误差的定义, 阐述所研究的量化过程应满足的4个一般性条件, 分析量化误差随相角变化而变化的固有特性, 并开展模拟实验和真实实验进行验证, 结果表明: 量化误差呈现周期性分布, 误差周期是信号周期的 $1/N$ (N 为一个信号周期内的采样个数); 在误差周期内, 量化误差的分布是对称的; 相角量化误差的零点具有独立性, 这些零点与转换分辨力、信号幅值无关。指出调节 N 值使这些零点与预设相角相联系具有重要应用价值, 有望推动相角标准研制和阻抗电桥技术发展, 并扩展高速、低功耗、低成本数模转换器的应用。

关键词: 量化误差; 相角; 幅值; 数模转换; 周期性; 对称性; 独立性; 零点应用

中图分类号: TB971; TN911; TN792 **文献标志码:** A **文章编号:** 1674-5795 (2025) 05-0001-09

Revisiting discussion on inherent characteristics of quantization error in digital-to-analogue conversion

LU Zuliang*, YANG Yan, ZHANG Zhonghua

(National Institute of Metrology, Beijing 100029, China)

Abstract: To accurately achieve the desired phase angle during digital-to-analog conversion, a commonly used approach is to increase the conversion resolution. This method relies on finer amplitude-axis discretization to better approximate the original waveform. However, it comes with several disadvantages, such as high cost, slow conversion speed, and considerable power consumption. To solve these problems, this paper further explores a novel method — time-axis segmentation. A definition of quantization error is introduced, which includes both phase angle quantization error (PQE) and amplitude quantization error (AQE). Four essential conditions for the quantization process are presented. The paper also analyzes how the quantization error inherently varies with the phase angle. Simulation and experimental results are provided to validate the theoretical conclusions. The results show that the quantization errors exhibit a periodic distribution, with the error period being $1/N$ of the signal cycle, where N denotes the number of samples per signal cycle. Within each error period, the quantization errors are symmetrically distributed. Moreover, a series of zero-points of the phase angle quantization error is derived, which are independent of both the conversion resolution and the signal amplitude. By adjusting N to link these zero-points with the desired phase angle, new application opportunities arise, which is expected to contribute to the advancement of phase angle standards and impedance bridge technology, and promote the use of high-speed, low-power, and cost-effective digital-to-analog converters.

收稿日期: 2025-06-25; 修回日期: 2025-07-07

引用格式: 陆祖良, 杨雁, 张钟华. 数模变换量化误差固有特性再讨论[J]. 计测技术, 2025, 45(5): 1-9.

Citation: LU Z L, YANG Y, ZHANG Z H. Revisiting discussion on inherent characteristics of quantization error in digital-to-analogue conversion[J]. Metrology & Measurement Technology, 2025, 45(5): 1-9.



Key words: quantization error; phase angle; amplitude; digital-analog conversion; periodicity; symmetry; independence; zero-point application

0 引言

一般采用数模转换方法获得正弦交流电压信号，其输入来自离散的数字信号，该数字信号由原始的连续(数字)信号经过等间隔的离散得到。数模转换实质上包含量化和转换2个过程，量化过程是在(数字)电压轴上做基于二进制的有限次分割，转换过程则将二进制数字变为模拟电压并保持。只要满足采样定理，时间轴的等间隔理想离散就不会引起误差。但量化过程的结果带来以 $L_{\text{LSB}}/2$ (L_{LSB} 为最小分辨力，其中，LSB指Least Significant Bit)为限的误差，反映在输出交流电压信号的幅值误差和相角误差上。本文针对数模转换中量化过程带来的相角误差和幅值误差进行讨论。

数模转换器(Digital-to-Analogue Converter, DAC)是一种广泛使用的电子器件。可编程量子电压标准(Programmable Josephson Voltage Standard, PJVS)是数模转换的一种量子设备，PJVS具有 L_{LSB} ，在基于二进制的分割方式上，PJVS与一般的DAC不同。PJVS工作在kHz频率，其输出具有量子等级的不确定度，一般应用于计量基准/标准装置中。在PJVS中，转换输出值与量化后的值相等。DAC则与之不同，量化后数字值与输出模拟值之间还存在转换误差，转换误差随DAC元件的不同而不同，不能归入固有误差一类。

一般而言，通过DAC器件可以输出一个电压，使它的初相角等于指定值；或生成2个电压，使它们的相角差等于指定值。基于上述原理，能够形成相角的源(source)标准^[1-2]。一个被测电压信号的初相角也可以由另一类电子器件——模数转换器(Analog-to-Digital Converter, ADC)测量得到，形成相角的表(meter)标准^[3]。上述2种相角标准不确定度较优者可校准另外一个。它们的不确定度与所使用器件的工作原理、制造工艺有关，更与它们背后的理论基础有关，例如指导ADC的采样定理。因此，探索DAC相角量化误差(Phase Angle Quantization Error, PQE)的规律是非常有意义的。

应用PJVS的阻抗电桥^[4]，利用2个量子电压平衡2个阻抗上的电压(当2个阻抗通以相同的电流时)，通过电压比获得阻抗比。基于该原理测量时，同类阻抗(例如比较2个交流电阻器或比较2个电容器时)的测量不确定度可达到 10^{-8} 水平^[4]；不同类阻抗的比较更具挑战性，因为PJVS具有快速瞬态和复杂频谱特性^[5]，其中的相角准确设置也是值得探讨的问题。

全数字阻抗电桥(Fully - Digital Impedance Bridge, FDIB)中，由2个DAC提供电压比^[6]。最近的研究结果表明：在特定条件下，全数字电桥的不确定度可达 10^{-7} 水平^[7]。但是相角差问题仍需要进一步研究。

相角是信号周期的分数，将相角概念应用于测量中，对于获得更精细的分辨力具有积极意义，例如采用载波相位技术的全球导航卫星系统精密定位中，采用相角差确定位置差相较采用波长确定位置差，结果更精细^[8-9]。需要采用锁相环(Phase-Locked Loop, PLL)等设备实现相角差的测量，PLL则可通过高水平的相角源标准进行校准，以保证定位的不确定度。

工程应用中，数字相控阵雷达^[10-11]是应用相角的典型代表。每个发射/接收(Transmit/Receive, T/R)模块中采用的DAC，可以由其所在位置分别控制相位，进而在所需方向上产生相长干涉，以显著增强波束，并产生扫描效果。

文献[12]指出：直接数字频率合成器(Direct Digital Frequency Synthesizer, DDS)中因相位累加器截断和正弦查找表引起的杂散信号具有确定性和周期性等性质，涉及数字信号处理过程中的量化误差。本文基于DAC和PJVS，研究数模转换过程的量化误差，探讨进一步的规律。

在几十Hz到几GHz的广阔频段内，尽管涉及不同的专业，但有关数模转换的原理和过程具有很高的相似性。本文在文献[13]的基础上进一步讨论这种相似性的理论基础，分析量化误差随自变量(设置相角)变化而变化的规律，并开展模拟

实验和真实实验进行验证，为相关领域的科研工作者提供借鉴。

1 量化误差

1.1 定义

对原始(数字)信号 $y(x) = \sin x$ 的一个周期做 N 份等间隔离散，得到数据列 y_n 为

$$y_n = \sin(nH), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N - 1 \quad (1)$$

式中： H 为离散间隔， $H = 2\pi/N$ 。经过理想的数模变换，即假设变换的分辨力为无穷小(不考虑量化效应)时，连续的模拟输出 $z(x)$ 为

$$z(x) = y_n, \quad nH \leq x < (n + 1)H \quad (2)$$

式(2)为阶梯波，基波分量的幅值为 c_1 ，相角为 ϕ_1 。式(1)表示的原始信号、式(2)表示的阶梯波及该阶梯波的基波分量之间的关系如图 1 所示。

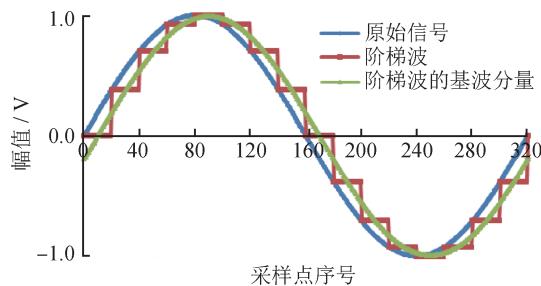


图 1 原始信号、阶梯波及其基波分量的关系

Fig.1 Original signal, staircase wave and its fundamental component

考虑量化效应，假如数模变换的最小分辨力为 L_{LSB} ，量化后的数据列 y_n^q 为

$$y_n^q = [\text{INT}(\frac{y_n}{L_{\text{LSB}}} + 0.5)] \cdot L_{\text{LSB}} \quad (3)$$

式中：INT 为向下取整函数运算符号， q 为量化标记。

对于包括式(3)在内的量化过程，应满足以下一般性条件：

条件 1，在一个数据列内，假如 $y_m = y_n$ ($m = 0, 1, 2, \dots, N - 1$)，则 $y_m^q = y_n^q$ ；

条件 2，在一个数据列内，假如 $y_m = -y_n$ ，则 $y_m^q = -y_n^q$ ；

条件 3，在 2 个数据列内，假如 $y_{2n} = y_n$ ，则对所有的 n 有 $y_{2n}^q = y_n^q$ ；

条件 4，在 2 个数据列内，假如 $y_{2n} = -y_n$ ，则对所有的 n 有 $y_{2n}^q = -y_n^q$ 。

这些条件的物理意义为：相同的原始数据量化后也相同，相反的原始数据量化后也相反，相同的 2 个原始数据列量化后也相同，相反的 2 个原始数据列量化后也相反。这些看似简单的条件，实现起来不容易。例如，在式(3)中存在不满足上述条件的小概率事件^[13]。

量化之后相应的连续输出 $z^q(x)$ 为

$$z^q(x) = y_n^q, \quad nH \leq x < (n + 1)H \quad (4)$$

式(4)也是一个阶梯波，其基波分量的幅值为 c_1^q ，相角为 ϕ_1^q 。

定义基波的相角量化误差 $\Delta\phi_1^q$ 为

$$\Delta\phi_1^q = \phi_1^q - \phi_1 \quad (5)$$

定义基波的幅值量化误差(Amplitude Quantization Error, AQE) Δc_1^q 为

$$\Delta c_1^q = c_1^q - c_1 \quad (6)$$

1.2 主要固有性质

归纳量化误差随初相角 ϕ 变化而变化的规律如下：

1) 周期性

量化误差呈现周期性分布，周期为 H 。一个信号周期内有 N 个这样的误差周期，可称为 H 周期。

2) 对称性

量化误差在 H 周期内呈现对称性分布，即在 H 周期中点两侧的对称点上，相角量化误差绝对值相等，符号相反；幅值量化误差绝对值相等，符号相同。

3) 相角量化误差的零点

当设置相角为 $0H$ 或 $0.5H$ 时，相角量化误差取零值。称这些初相角为相角量化误差零点(以下无必要时简称零点)。由于周期性，可以推出更多的零点：

第一组： $0H, 1H, 2H, \dots, (N - 1)H$ ；

第二组： $0.5H, 1.5H, 2.5H, \dots, (N - 0.5)H$ 。

组内各点上，幅值量化误差相等。两组之间，幅值量化误差不相等。

设置相角为 $0H$ 时，相角量化误差很小，可忽略，这一事实早在文献[13]之前已被科研工作者所认识^[14-15]。

4) 相角量化误差零点的独立性

相角量化误差零点与数模转换的分辨力无关，与原始信号的幅值也无关。

2 模拟实验

上述固有性质可以通过计算机模拟实验来检查复核。不失一般性，假设原始数列为

$$y_n = C \sin(nH + \alpha) \quad (7)$$

式中： C 为归一化于 DAC 内部参考电压的相对幅值， $C = c/V$ ， c 为原始信号的幅值， V 为 DAC 内部参考电压； α 为设置相角。

2.1 模拟实验步骤

模拟实验的步骤如下：① 设定原始信号参数 C 和 α 、周期分割数 N ，以及数模转换分辨力(单位为 bit)；② 计算离散区间 H ；③ 计算原始数据列 y_n ；④ 对 y_n 进行基于阶梯波的离散傅里叶变换(Discrete Fourier Transform, DFT)，获得该阶梯波基波分量的幅值 c_1 和相角 ϕ_1 ；⑤ 计算量化后数据列 y_n^q ；⑥ 对 y_n^q 进行基于阶梯波的 DFT，获得该阶梯波基波分量的幅值 c_1^q 和相角 ϕ_1^q ；⑦ 由 ϕ_1^q 和 ϕ_1 计算相角量化误差；⑧ 由 c_1^q 和 c_1 计算幅值量化误差。

以 $z(x)$ 为例，获得阶梯波基波分量的 DFT 公式为

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} z(x) \cos x dx = \frac{2}{NH} \sum_{n=0}^{N-1} y_n \int_{nH}^{(n+1)H} \cos x dx = \frac{2}{NH} \sum_{n=0}^{N-1} y_n \{ \sin[(n+1)H] - \sin(nH) \} \quad (8)$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} z(x) \sin x dx = \frac{2}{NH} \sum_{n=0}^{N-1} y_n \int_{nH}^{(n+1)H} \sin x dx = \frac{2}{NH} \sum_{n=0}^{N-1} y_n \{ -\cos[(n+1)H] + \cos(nH) \} \quad (9)$$

2.2 模拟算例

设 $N = 48$ ，设置 2 个算例分别为① $C = 1$ ，DAC 分辨力 8 bit；② $C = 0.5$ ，DAC 分辨力 18 bit。设置相角与离散间隔的比 α/H 取值位于 $[0, 2]$ ，步进 0.1。模拟结果见图 2，其中，实线相连的点表示相角量化误差，虚线相连的点表示幅值量化误差，这些线段只表示所连接的点属于一类，并不表示真实的分布。

从图 2 中可以清晰地观察到，对于每个算例，第 1 和第 2 个 H 周期内，量化误差的分布是相同的，

这是周期性的表现。对称性表现为：中点 $\alpha/H = 0.5$ 两侧的对称点上(例如 $\alpha/H = 0.1$ 和 $\alpha/H = 0.9$)，相角量化误差绝对值相等符号相反，而幅值量化误差则相等。

比较图 2(a)和图 2(b)可知：量化误差分布界限相差约 2.5 个数量级，但两图中的相角量化误差分布呈现了相同的零点。这正是需要验证的重要结论。同时，相角量化误差零点上的幅值量化误差不为零，对于同一算例，在 α/H 为 0、1、2 的点上，幅值量化误差取相同值；在 α/H 为 0.5、1.5 的点上，幅值量化误差取另外的相同值。同一算例中，相角量化误差与幅值量化误差的分布范围大致相近。

开展大量此类模拟实验，结果表明：非零点上的相角量化误差和幅值量化误差以 $0.5(L_{\text{LSB}}/2)/C$ 为限。该限度给出了相角量化误差零点优势的估计。

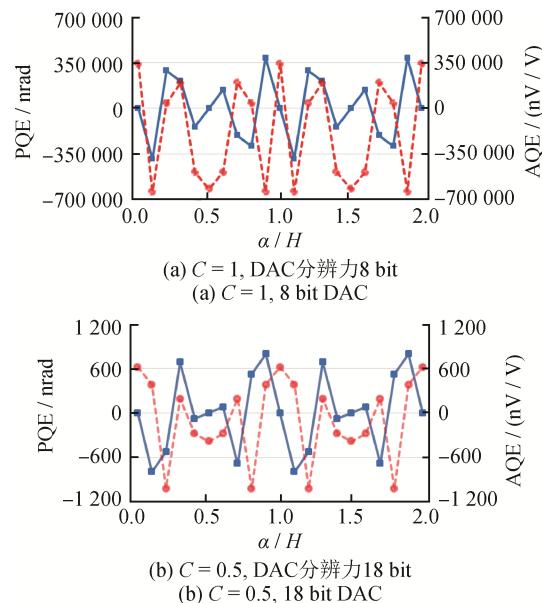


图 2 相角量化误差和幅值量化误差的周期性和对称性

Fig.2 Periodicity and symmetry of PQE and AQE

3 真实实验中的相角量化误差零点验证

3.1 实验装置与过程

设 $N = 20$ ，得到原始数据列 y_n 。实际输入保留至小数点后 6 位。量化后数据列 y_n^q 由真实的 DAC (型号为 NI6733，内置参考电压为 ± 10 V，分辨力为 16 bit，时钟频率为 20 MHz，滤波器模式为“48 tap”)

standard”，建立时间为 50 μs)产生，并由真实的 ADC(型号为 NI5922，内置参考电压为±1 V，分辨力为 22 bit，采样率为 1 Ms/s)测量得到。设原始信号幅值 $c = 1 \text{ V}$ ，初相角为 $0.5H \text{ rad}$ ，频率 $f = 1 \text{ kHz}$ 。上述设置条件下，DAC 输出的模拟阶梯波有 20 个台阶，每个台阶上有 $M = 50$ 个采样，每个信号周期内有 1 000 个采样^[16]。

将另一 DAC 通道的时钟脉冲接入工作 DAC 通道和 ADC 通道，使之同步工作。工作 DAC 通道的触发信号同时控制 ADC。一次触发后，以 ADC 采样 10 个信号周期为一组，以连续 10 组为一次测量。

DAC 产生的过渡过程和 ADC(主要因其内置抗混迭滤波器)产生的吉布斯现象使阶梯波每个台阶的首尾两端出现较大波动，与中间部分相比，首尾两端的波动幅度几乎高 3 个数量级。舍去这些波动较大的采样点，只采用波动幅度不超过 ±10 μV 的中间部分连续采样点(20 个台阶上保留的采样点个数及位置相同)，计算它们的平均值作为 y_n^q 。即整个台阶的值以台阶中间平坦部分的平均值作为代表。

3.2 结果与分析

计算得到相角量化误差为 202 nrad，幅值量化误差为 −36 μV。

实验的设置相角为 $0.5H$ ，属于相角量化误差的零点，但实验结果显示：实际的相角量化误差不为 0 rad，而为 $2 \times 10^{-7} \text{ rad}$ 。幅值量化误差相对于原始信号幅值(1 V)为 $3.6 \times 10^{-5} \text{ V/V}$ ，符合 $0.5(L_{\text{LSB}}/2)/C = 3.8 \times 10^{-5} \text{ V/V}$ 的评估(此处 $C = 1/10 = 0.1$)。相角量化误差与幅值量化误差几乎相差 2 个数量级，正是此处为零点的有力证据，因为只有在零点，相角量化误差与幅值量化误差才呈现悬殊表现。

导致实际零点相角量化误差不为 0 rad，而为 $2 \times 10^{-7} \text{ rad}$ 的原因可能包括：① 时钟脉冲抖动(jitter)的影响；② 同步与触发的不完美；③ DAC 转换误差的不稳定，以及 ADC 采样误差的不稳定。针对上述 3 个原因进行研究分析。时钟脉冲抖动表现为信号周期、阶梯波平台宽度、采样间隔这些时间特征值不严格相等。本实验中，20 MHz 时钟对应 1 kHz 信号，每个时钟脉冲相当于 $5 \times 10^{-5} \text{ rad}$ ，实验结果 $2 \times 10^{-7} \text{ rad}$ 如果全部归算为时钟脉冲抖

动，则抖动幅度约为时钟脉冲宽度的 4×10^{-3} ，似乎有一定的可信度。但实验中已将台阶两端各约 1/4 的采样点舍去，以中间平坦部分平均值作为整个平台的代表。阶梯波台阶本来就是平坦的，上述操作重构了这种平坦。时钟脉冲抖动引起的诸如信号周期、平台宽度、采样间隔的微小不稳定在这种平坦面前无足轻重。同步与触发的不完美表现为周期初始采样值存在偏差，与时钟脉冲抖动相似，此影响可以忽略。器件误差不稳定，特别是 ADC 采样误差的不稳定，会造成阶梯波形状的不稳定，进而使基波参数不稳定。核算 10 组数据列中前 5 组与后 5 组的相角量化误差，两者并不一致，说明台阶中间部分采样值不稳定，引起零点相角量化误差偏离。进一步分析可知：第 1.1 节中所述的条件 1 至条件 4 没有完全满足，导致了零点相角量化误差的偏离。

4 相角量化误差零点应用的进一步讨论

4.1 降低相角量化误差的两类方法

方法 1：增加 DAC 分辨力(即采用高 bit 数的 DAC)以降低相角量化误差与幅值量化误差。根据量化误差估计式 $0.5(L_{\text{LSB}}/2)/C$ 可知其原理，降低 L_{LSB} 会使估计值变小。这种增加分辨力的操作本质上是在幅值轴上做更精细的分割，以便尽可能地接近原始信号。但增加 DAC 分辨力将导致成本更高、速度减慢、功耗增大。估计式中另一影响因素是 C ， C 越小估计值越大。这意味着当原始信号幅值与 DAC 内置标准电压值相差悬殊时，相角量化误差与幅值量化误差均较大，这是该方法的又一缺点。

方法 2：基于相角量化误差零点原理，调节参数，直接将需要的相角对应安排在零点之上，具体操作为：选择整数 p 和整数 N ，使有理数 p/N 接近需要的相角与周期的比 $\alpha/(2\pi)$ ，两者的差控制在预定的不确定度范围内^[13]。这种做法实质上是在时间轴上(而不是幅值轴上)做适当的分割(所谓“适当”是指并非 N 越大越好)。

方法 2 的主要优点之一是利用了时间控制这一成熟技术，与幅值轴方向上的细致分割相比，有达到更高准确度的潜力。

应用方法 1 时也有使用原子钟的情况，以获

得准确稳定的时间频率，但因没有应用零点的概念，设置的相角很可能在非零点上。方法2则主动利用零点概念，与方法1相比，方法2可获得 $0.5(L_{\text{LSB}}/2)/C$ 为限的理论优势。需要注意的是，应用方法2的前提是条件1至条件4均得到满足。否则如真实实验所示，器件性质的不稳定性(即幅值轴方向上的不稳定性)会使实际的相角量化误差略微偏离零值。

从另一角度分析，方法2不受 L_{LSB} 和 C 约束，在采用较低分辨力的DAC、原始信号幅值大幅度变化的情况下，仍然能获得较小的相角量化误差，这是方法1所不具备的优势。

4.2 应用建议

将所需要的相角设置在零点上，以降低量化误差，相关的应用原则和举例详见文献[13]。下面在已有研究的基础上，进一步展开讨论与分析。

时间控制是本方法的重要前提，时间脉冲的抖动需要特别关注。条件1至条件4是一般性证明的基础，应得到保证。幅值轴方向上的分割可能不再需要像方法1一样精细和准确，但必须稳定。如果模拟信号由1个DAC提供，则同一数据列输入下，DAC输出的模拟信号必须前后相同；如果模拟信号由2个DAC提供，则相同数据列输入下，2个DAC输出模拟信号必须完全一致。假如这些稳定性和一致性得不到满足，应进行必要的调整、补偿，最后对调整、补偿尚不能解决的部分，进行不确定度评估。

在相角源标准中，需要的相角一般是规则的，例如 $\pi/6$ 、 $\pi/3$ 、 $\pi/2$ 等。根据零点与参数 N 之间的关系，可以选择适当的时间分割方案，使数据列 $y_n = C \sin(nH + pH)$ 具有相角 $pH = \alpha$ 。例如对于 $\pi/3$ ，此时 $\alpha/(2\pi) = 1/6$ ，数对 (p, N) 可以选择为 $(6, 36)$ 、 $(5, 30)$ 或 $(4, 24)$ 等；而对于 $\pi/2$ ，此时 $\alpha/(2\pi) = 1/4$ ，相应的数对 (p, N) 可以选择为 $(9, 36)$ 、 $(7.5, 30)$ 或 $(6, 24)$ 等。在这样的选择下，输出的信号具有准确的相角，理论上相角量化误差为零，但实际情况电压稳定性可能对零点产生轻微影响。

零点与信号幅值无关，这一特性对于阻抗电桥技术研究具有特别的意义，即幅值调节不会影

响已经确定的相角。需要注意的是，一旦某个相角差确定并表现在2个输出电压上后，再次调节电压幅值对电压比的模有什么影响？答案是：当2个相角设置在 H 周期的不同分割点上，且2个原始数据列的幅值相等时，它们的幅值量化误差将相等，不影响电压比的模。如果改变其中一个原始数据列的幅值(这是常见的情况)，2个幅值量化误差将不相等，这将影响电压比的模。这种情况对基于PJVS的阻抗电桥不会产生问题，因为输出的量子电压是已知的，幅值量化误差可以通过傅里叶变换计算得出。在基于DAC的全数字阻抗电桥中，幅值量化误差也可以计算，但DAC的转换误差一般不能计算，因器件而异，应采用其他方法克服，或纳入不确定度评估。

本文没有讨论DDS的具体情况，但如果相位累加器截断之后时间轴分割点之间具有相等的间隔，原始数据列与模拟输出之间满足条件1至条件4，本文所论述的相角量化误差零点性质也可以在DDS应用中作为参考。

零点的应用拓展了低分辨力且高稳定性DAC的应用价值，这将打破目前分辨力和每通道更新速率的平衡。在大规模使用DAC且相角准确度指标优于幅值准确度指标的场合，可以考虑DAC的定制化生产，制造低分辨力、高稳定性参数的DAC，并使时钟外置。在确定的准确度前提下，获得高速、低功耗、低成本优势。

5 结论

论述了相角量化误差和幅值量化误差的概念，分析了量化误差与 N 有关的固有特性。一个信号周期内有 N 个相同分布的量化误差周期，周期宽度为 H ；一个 H 周期内呈现对称性，在与 H 周期内中点距离相等的点上，相角量化误差绝对值相等但符号相反，幅值量化误差则相同。在此基础上，导出相角量化误差的零点，典型的零点如 $\alpha = 0H$ 、 $\alpha = 0.5H$ ，其余零点可由周期性导出。在这些零点上，幅值量化误差不为零。通过模拟实验验证了量化误差的固有特性。在1 kHz条件下开展了真实实验，结果表明：设置点相角量化误差为 2×10^{-7} rad，而幅值量化误差为 $-36 \mu\text{V}$ ，两者的悬殊证实了零

点的存在。分析了零点实验测量值与理想值偏离的原因，指出幅值轴参数的不稳定导致了此偏离。针对应用中可能出现的问题给出了处理建议。

当需要的相角设置在零点时，DAC的实际输出相角量化误差可以接近零值，此结论与数模转换的分辨力无关，与原始信号的幅值无关。基于该原理，提出了一种准确实现相角的新方法，使用该方法的前提是精密的时间控制，以及输出电压幅值的稳定控制。在非零点上，相角量化误差和幅值量化误差的变化限度可用 $0.5(L_{\text{LSB}}/2)/C$ 估计。

参考文献

- [1] TURGEL R S, OLDHAM N M. High-precision audio-frequency phase calibration standard [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 1978, 27: 460–464.
- [2] TURGEL R S. A precision phase angle calibration standard for frequencies up to 50 kHz [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 1985, 4 (34) : 509–516.
- [3] LU Z L, WANG L, LI M, et al. Harmonic power standard at NIM and its compensation algorithm [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2010, 59(1): 180–187.
- [4] LEE J, SCHURR J, NISSILA J, et al. Programmable Josephson arrays for impedance measurements [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2011, 60(7): 2596–2601.
- [5] HAGEN T, PALAFOX L, BEHR R. A Josephson impedance bridge based on programmable Josephson voltage standards [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2017, 66: 1539–1545.
- [6] MARZANO M, D'ELIA V, ORTOLANO M, et al. Primary realization of inductance and capacitance scales with a fully digital bridge [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2022, 71: 1503008.
- [7] KUCERA J, KOVAC J, SVOBODA P, et al. Alternative traceability chains of impedance units with fully digital impedance bridges [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2025, 74: 1504306.
- [8] 任鹏羽, 周乐韬, 高小波, 等. GNSS载波相位快速相对定位全球精度分析[J]. 导航定位学报, 2023 ,11 (5): 120–127.
- REN P Y, ZHOU L T, GAO X B, et al. Global precision analysis of GNSS carrier phase fast relative positioning [J]. Journal of Navigation and Positioning, 2023, 11(5): 120–127. (in Chinese)
- [9] 朱棣. 城市环境下高精度载波相位定位关键技术研究与实现[D]. 北京: 北京邮电大学, 2019.
- ZHU D. Research and implementation on high accuracy carrier phase positioning in urban area [D]. Beijing: Beijing University of Posts and Telecommunications, 2019. (in Chinese)
- [10] 张光义. 相控阵雷达[M]. 北京: 国防工业出版社, 2009.
- ZHANG G Y. Principle of phased array [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2009. (in Chinese)
- [11] 刘新安, 曾正茂, 陈玉宝, 等. 双线偏振全数字相控阵天气雷达设计与试验[J]. 现代雷达, 2024, 46(4) : 65–75.
- LIU X A, ZENG Z M, CHEN Y B, et al. Design and experiment of dual polarization all - digital phased array weather radar [J]. Modern Radar, 2024, 46(4): 65–75. (in Chinese)
- [12] TIAN X G, ZHANG Z L, ZHANG E Y. Spurious signals due to amplitude quantization in direct digital frequency synthesizers [J]. Microelectronics Journal, 2010, 41 (2 / 3): 114–120.
- [13] 陆祖良. 阶梯型正弦波相角量化误差的周期性与对称性——阶梯波研究之五[J]. 计量学报, 2021, 42(7) : 913–922.
- LU Z L. Periodicity and symmetry in quantization error of phase angle of sinusoidal waveform generated by digital-to-analogue converter [J]. Acta Metrologica Sinica, 2021, 42(7): 913–922. (in Chinese)
- [14] KINARD J R, HARRIS L A. Wattmeter calibration at zero power factor using digitally generated sinewaves [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 1976, 25(4): 547–549.
- [15] ZHANG Z H, WANG D A, HU Z, et al. A precise measurement of QHR in NIM [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 1991, 40: 889–892.
- [16] LU Z L, YANG Y, HUANG L, et al. Further investigation for piecewise sampling to overcome transient effect of staircase waveform [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2017, 66(6): 1217–1226.

附录 A

量化误差固有性质的证明

第1节中所述的固有性质可按照定义基于 $(y_n^q - y_n)$ 的傅里叶变换进行证明，但因涉及非线性过程而带来困难。下面采用另一种方法进行证明，在相角量化误差性质证明^[12]的基础上进行完善，并增加幅值量化误差性质的证明。

A1 起始点轮换不变性

起始点轮换是指在保持循环数据列中元素大小和相邻位置不变的前提下，选取1个元素作为起始点并形成新的数列的操作。例如，原始数据列 y_0, y_1, \dots, y_{N-1} 和量化后数据列 $y_0^q, y_1^q, \dots, y_{N-1}^q$ 经过一次轮换后分别成为 $y_1, y_2, \dots, y_{N-1}, y_0$ 和 $y_1^q, y_2^q, \dots, y_{N-1}^q, y_0^q$ 。起始点轮换不变性是指：当原始数据列和量化后数据列的起始点经过同步轮换之后，它们的量化误差保持不变。

原始数据列[如式(1)所示]和量化后数据列[如式(3)所示]可视为循环数据列。起始点轮换后，任意一个元素 y_n 量化之后的值保持不变，仍然是 y_n^q 。两者在各自数据列中的相邻位置关系也不变。相应地，经数模转换后输出的2个阶梯波[如式(2)和式(4)所示]均为周期信号，它们各自的基本形状(如2个上升过零点之间的形状)保持不变，改变的只是基本形状的前后位置。例如，经过一次轮换后，两者基波分量的初相角有以下关系

$$\phi_1[y_1, \dots, y_{n-1}, y_0] = \phi_1[y_0, y_1, \dots, y_{n-1}] + H \quad (\text{A1})$$

$$\phi_1^q[y_1^q, \dots, y_{n-1}^q, y_0^q] = \phi_1^q[y_0^q, y_1^q, \dots, y_{n-1}^q] + H \quad (\text{A2})$$

因此有

$$\Delta\phi_1^q[y_1^q, \dots, y_{n-1}^q, y_0^q] = \Delta\phi_1^q[y_0^q, y_1^q, \dots, y_{n-1}^q] \quad (\text{A3})$$

相似地

$$c_1[y_1, \dots, y_{n-1}, y_0] = c_1[y_0, y_1, \dots, y_{n-1}] \quad (\text{A4})$$

$$c_1^q[y_1^q, \dots, y_{n-1}^q, y_0^q] = c_1^q[y_0^q, y_1^q, \dots, y_{n-1}^q] \quad (\text{A5})$$

因此可得

$$\Delta c_1^q[y_1^q, \dots, y_{n-1}^q, y_0^q] = \Delta c_1^q[y_0^q, y_1^q, \dots, y_{n-1}^q] \quad (\text{A6})$$

其他的轮换均可相似地证明。

A2 周期性证明

2个幅值相等的原始数据列为

$$y1_n = C \sin(nH + \phi) \quad (\text{A7})$$

$$y2_n = C \sin(nH + \phi + pH), p = 0, 1, 2, \dots, N - 1$$

当整数 p 在其规定的范围内变化时，有

$$\Delta\phi_1^q(y2_n) = \Delta\phi_1^q(y1_n) \quad (\text{A8})$$

$$\Delta c_1^q(y2_n) = \Delta c_1^q(y1_n) \quad (\text{A9})$$

此即为周期性，证明如下：原始数据列 $y1_n$ 的起始点轮换时， $y1_n$ 就成为 $y2_n$ ，整数 p 即为新起始点的位置。根据起始点轮换不变性，式(A8)、式(A9)成立。证毕。

这说明，相角量化误差和幅值量化误差随初相角 ϕ 的不同而变化，但只要知道相角量化误差和幅值量化误差在区间 $[0, H]$ 中的分布，它们在整个信号周期 $[0, 2\pi]$ 的分布就可知。相角量化误差和幅值量化误差呈现周期性分布，周期为 H 。

A3 对称性证明

在一个 H 周期内，相角量化误差和幅值量化误差具有对称性。假设

$$y1_n = C \sin(nH + \alpha) \quad (\text{A10})$$

$$y2_n = C \sin(nH + H - \alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq H$$

则有

$$\Delta\phi_1^q(y2_n) = -\Delta\phi_1^q(y1_n) \quad (\text{A11})$$

$$\Delta c_1^q(y2_n) = \Delta c_1^q(y1_n) \quad (\text{A12})$$

此即为对称性，证明如下

$$\begin{aligned} y2_n &= C \sin(nH + H - \alpha) = \\ &C \sin(-NH + nH + H - \alpha) = \\ &C \sin[-(N-1-n)H - \alpha] = \\ &-C \sin[(N-1-n)H + \alpha] = \\ &-C \sin(n^*H + \alpha) = -y1_{n^*} \end{aligned} \quad (\text{A13})$$

式中： n^* 为引入的新序列号， $n^* = N - 1 - n$ ，其用来表示与原序列号 n 相反的次序，当 $n = 0, 1, \dots, N-2, N-1$ 时，有 $n^* = N-1, N-2, \dots, 1, 0$ 。这表明式(A10)实际上是这样的2个数据列：其中一个是另一个的逆序排列，并且符号相反。 $y2$ 的傅里叶系数 a_1 和 b_1 有以下关系

$$\begin{aligned} \frac{NH}{2}a_1(y2) &= \sum_{n=0}^{N-1} y2_n \{ \sin[(n+1)H] - \sin(nH) \} = \\ \sum_{n^*=N-1}^0 -y1_{n^*} \{ \sin[(N-1-n^*+1)H] - \sin[(N-1-n^*)H] \} &= \\ \sum_{n^*=0}^{N-1} -y1_{n^*} \{ \sin(-n^*H) - \sin[(-n^*-1)H] \} &= \sum_{n^*=0}^{N-1} -y1_{n^*} \{ \sin[(n^*+1)H] - \sin(n^*H) \} = \end{aligned} \quad (A14)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=N-1}^0 -y1_n \{ \sin[(n+1)H] - \sin(nH) \} &= \sum_{n=0}^{N-1} -y1_n \{ \sin[(n+1)H] - \sin(nH) \} = -\frac{NH}{2}a_1(y1) \\ \frac{NH}{2}b_1(y2) &= \sum_{n=0}^{N-1} y2_n \{ -\cos[(n+1)H] + \cos(nH) \} = \\ \sum_{n^*=0}^{N-1} -y1_{n^*} \{ -\cos[(N-1-n^*+1)H] + \cos[(N-1-n^*)H] \} &= \end{aligned} \quad (A15)$$

$$\sum_{n^*=0}^{N-1} -y1_{n^*} \{ -\cos(n^*H) + \cos[(n^*+1)H] \} = \sum_{n^*=0}^{N-1} y1_{n^*} \{ -\cos[(n^*+1)H] + \cos(n^*H) \} = \frac{NH}{2}b_1(y1)$$

因此, $\phi_1(y2) = -\phi_1(y1)$, $c_1(y2) = c_1(y1)$ 。

同理可证明: 对于量化后数据列, 有 $a_1^q(y2) = -a_1^q(y1)$, $b_1^q(y2) = b_1^q(y1)$, 因此 $\phi_1^q(y2) = -\phi_1^q(y1)$, $c_1^q(y2) = c_1^q(y1)$ 。最后计算得 $\Delta\phi_1^q(y2) = -\Delta\phi_1^q(y1)$, $\Delta c_1^q(y2) = \Delta c_1^q(y1)$ 。证毕。

础实际上是对输出幅度稳定性的要求, 可以归结为第 1.1 节中所述的 4 个条件, 这 4 个条件是对量化这一非线性过程的恰当表示。

(本文编辑: 刘圣晨)

A4 相角量化误差零点存在性及独立性证明

原始数据列为 $y_n = C \sin(nH + \alpha)$, 由于相角量化误差的周期性和对称性, 有

$$\begin{aligned} \Delta\phi_1^q[C \sin(nH + \alpha)] &= -\Delta\phi_1^q[C \sin(nH + H - \alpha)] = \\ -\Delta\phi_1^q[C \sin(nH + NH - \alpha)] &= -\Delta\phi_1^q[C \sin(nH - \alpha)] \end{aligned} \quad (A16)$$

因此可得

$$\Delta\phi_1^q[C \sin(nH + \alpha)] + \Delta\phi_1^q[C \sin(nH - \alpha)] = 0 \quad (A17)$$

当 $\alpha \rightarrow 0$ 时, 相关的极限值存在, 即

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \Delta\phi_1^q[C \sin(nH + \alpha)] = \Delta\phi_1^q[C \sin(nH)] \quad (A18)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \Delta\phi_1^q[C \sin(nH - \alpha)] = \Delta\phi_1^q[C \sin(nH)] \quad (A19)$$

代入式(A17), 得到 $\Delta\phi_1^q[C \sin(nH)] = 0$ 。

同理可以证明 $\Delta\phi_1^q[C \sin(nH + 0.5H)] = 0$ 。

当 $\alpha = 0$ 或 $\alpha = 0.5H$ 时, 相角量化误差取零值, 称 $\alpha = 0$ 和 $\alpha = 0.5H$ 为相角量化误差的零点。根据周期性, 可以推导得出更多的零点。

仅应用相角量化误差的周期性、对称性、当 $\alpha \rightarrow 0$ 时极限值的存在性, 就证明了 $\alpha = 0$ 和 $\alpha = 0.5H$ 为相角量化误差的零点。相角量化误差零点的存在是独立的, 它们与数模转换的分辨率无关, 与原始信号的幅值无关。

上述证明的基础是至少在测量持续的若干个信号周期内, 阶梯波的基波形状保持不变。此基

第一/通信作者: 陆祖良(1948—), 男, 江苏南通人, 研究员, 博士, 主要从事阻抗和电能计量研究, 同时开展阶梯波性质及应用领域的相关科学研究。



作者简介: 杨雁(1978—), 男, 湖南岳阳人, 中国计量科学研究院研究员, 博士, 主要研究方向为阻抗基标准、同轴交流电桥、精密电磁测量等。



作者简介: 张钟华(1940—), 江苏苏州人, 我国著名计量学专家, 中国计量科学研究院首席科学家, 五一劳动奖章获得者, 1965 年清华大学电机系研究生毕业, 1990 年获全国先进工作者称号, 1991 年获国务院颁发的政府特殊津贴, 1995 年当选中国工程院院士。主要从事电测及电学量子计量、质量量子计量等研究工作。1992 年获国家科技进步二等奖, 2001 年获得中国仪器仪表学会的科学技术奖, 2003 年获何梁何利科学与技术进步奖, 2007 年获国家科技进步一等奖。